GEOMETRIA POÉTICA

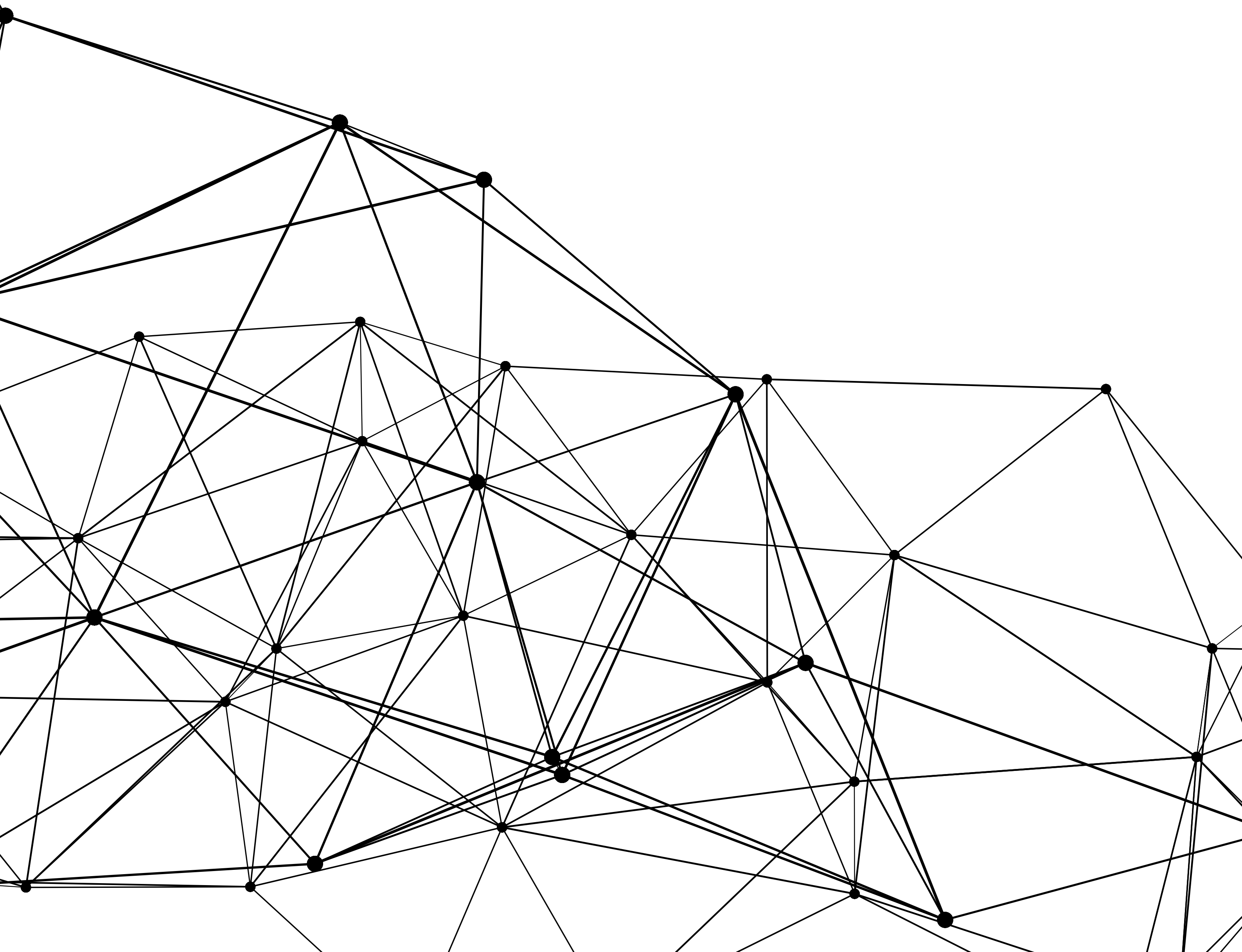
EDUCAÇÃO

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

“

A MATEMÁTICA É O ALFABETO COM O QUAL DEUS ESCREVEU O UNIVERSO”

GALILEU GALILEI



SUMÁRIO

01

PLANOS E PONTOS

"

O PONTO
A PARTIR DE UM PONTO
RETAS SÃO TRAÇADAS
DANDO SEGMENTO
ATÉ UM PONTO DE CHEGADA.

ENTRE UM PONTO E OUTRO
SEM DEFINIÇÃO, DIMENSÃO E FORMA
VIVENDO UMA FASE QUE TRANSFORMA
UM CORAÇÃO CONTRADITÓRIO
HÁ INFINITAS HISTÓRIAS

AO FIM DESSE PONTO, HÁ UM NOVO RECOMEÇO
FORMANDO ASSIM, UM CICLO QUE JÁ CONHEÇO
MESMO SABENDO A DIMENSÃO DO PEQUENO ESPAÇO
APRENDO A INFINIDADE DE VITÓRIAS E FRACASSOS"

GABRIELE M. CHRISTAN, 3º ANO ENSINO MÉDIO, ESCOLA SESI DE SERTÃOZINHO-SP

A vida acontece. A gente acorda, caminha, corre, cai. Hoje, por exemplo, eu acordei às 6 horas da manhã, preparei o café, tomei banho, me arrumei e corri para o ponto de ônibus. Ao chegar no trabalho, cumpri com os meus afazeres, almocei, e retornei ao trabalho. Quando relógio marcava 5 horas da tarde, arrumei minhas coisas e peguei o ônibus para voltar para casa. Alguns de vocês têm uma rotina semelhante. Acordam cedo para a escola ou trabalho. Pegam carona ou ônibus – alguns caminham até a escola. E assim o dia acontece. Um após o outro.

Mas a vida simplesmente não acontece no vácuo do Universo. Não. Quando você acorda, você esta na sua casa. Sua casa tem uma arquitetura típica, que você conhece bem. Por exemplo, no fundo da casa você tem seu quarto e o quarto do seu irmão, que fica ao final do corredor que liga a sala de jantar ao banheiro e ao quarto dos seus pais, e assim por diante. Existem paredes, janelas, portas. Todas as partes encontram-se num local determinado. Algumas casas têm dois quartos, outras três, mas toda a casa tem um desenho fixo. Esse desenho fixo não surgiu aleatoriamente. Pelo contrário, um arquiteto ou engenheiro desenhou a "planta" da sua casa antes da casa propriamente dita ser construída.

Em algum momento, havia alguém com uma ideia na cabeça e uma folha de papel em branco, que através de desenhos cuidadosos transformou uma folha comum no que você hoje chama de "casa". A folha comum podia acomodar qualquer tipo de desenho, ou qualquer tipo de conteúdo. Poderia ser um texto. Uma fotografia. Um rascunho. Um poema. Poderia ser outra casa que não a sua. Mas não era. Aquela folha estava destinada a ter as instruções para a construção da *sua* casa.

A folha em branco é o que chamaremos de *plano*. Vamos considerar como plano todo o espaço que pode acomodar "coisas", sejam essas "coisas" formas geométricas ou não. Essa página, por exemplo, é um plano que acomoda palavras.

É importante saber que o plano não precisa ser necessariamente uma folha. O terreno da sua casa, por exemplo, também é um plano. Sua rua também pode ser considerada um plano, assim como seu bairro, sua cidade, seu país. O plano tem dimensões de acordo com o que estivermos medindo. Se estivermos medindo paredes, seu terreno é o plano. Se tivermos medindo distância entre países, o planeta é um plano, agora que delimitamos um plano, temos que determinar o local de início do desenho, da forma, do texto. Aonde é o começo? Qual o *ponto de partida*? O *ponto* é um local único no plano. É o local onde algo começa (*ponto de partida*) e/ou termina (*ponto de chegada*). Por exemplo, quando você acorda pela manhã na sua casa, você anda do seu quarto (ponto de partida) até a cozinha (ponto de chegada) para o café da manhã. Quando o engenheiro ou arquiteto desenhou sua casa, ele começou por algum lugar – talvez a porta da frente, talvez a parede dos fundos. O importante é que o *ponto* nos localiza em um plano.

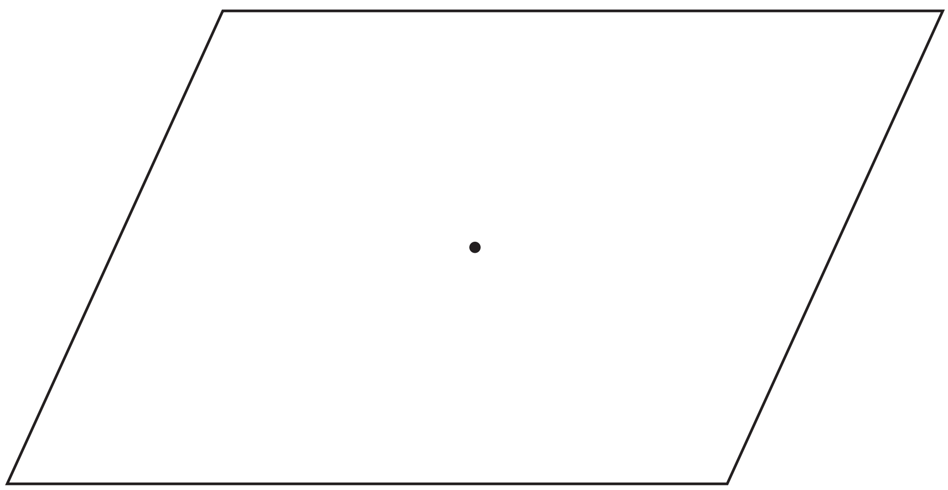


Figura 1 - Ponto em um plano

02

SEGMENTOS DE RETA

“

EXISTE UMA FORÇA QUE ME LIGA A VOCÊ”

CAPÍTULO 2
Segmento de reta

Agora que você já sabe o que são *planos e pontos*, é hora de ir além. No dia-a-dia, é comum ouvirmos frases como “estou ligado a ele(a)”, ou “estamos unidos”. Geralmente falamos isso quando há uma amizade extremamente fiel, ou um relacionamento que envolve sentimentos profundos. O que tentamos expressar é o simples fato que a nossa existência depende não só de nós mesmos, mas também da existência de outra(s) pessoa(s). E é essa ideia que vamos explorar para entender o conceito de *segmento de reta*.
Um segmento de reta é caminho mais curto que liga um ponto de partida e um ponto de chegada no plano. Por exemplo, suponhamos que temos um plano – a folha em branco do capítulo anterior – onde estão situados os pontos de partida A e de chegada B.

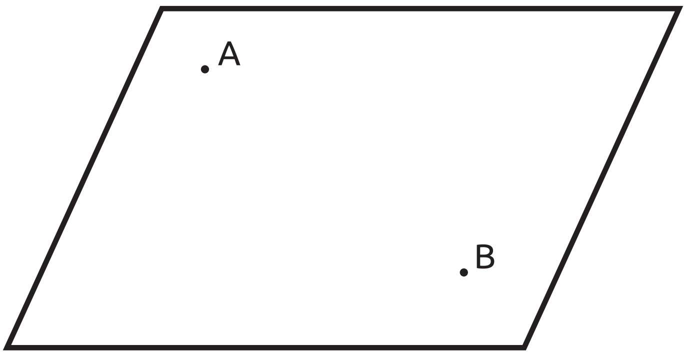


Figura 2 - Plano com dois pontos

Um *segmento de reta* é o caminho mais curto que liga os pontos A e B.

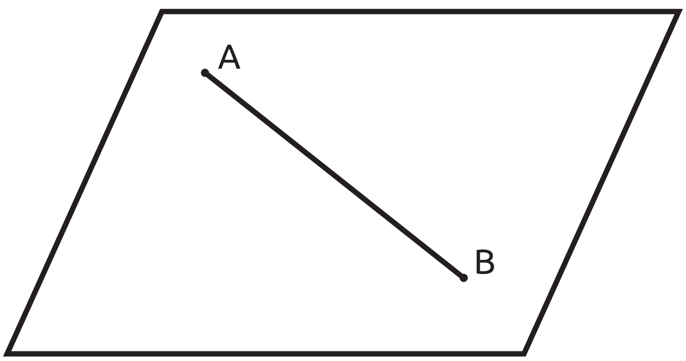


Figura 3 - Segmento de reta unindo dois pontos

Segmentos de reta são representados como ($\overline{AB}$), significando que o segmento de reta vai do ponto A ao ponto B (o contrário é perfeitamente válido, por exemplo, se tomarmos o ponto B como partida e o ponto A como chegada, num segmento ($\overline{BA}$)).

Simples, não?

Mas você deve se perguntar: “Por que diabos chamar de *segmento de reta* e não simplesmente *reta*”? Ótima pergunta.

Existe uma diferença sutil, entre segmento de reta e reta. Um segmento de reta tem início e fim (ponto A, ponto B). Por outro lado, uma reta é ilimitada. Como assim? A reta não tem inicio no ponto A, nem final no ponto B, ela pode até passar por esses pontos, mas esses pontos não determinam a origem nem o destino da reta. De uma maneira simples, podemos dizer que um segmento de reta é um “pedaço” da reta que liga os pontos A e B.

É claro que você pode falar “Ah! Isso são somente definições. Em prática, qual a diferença entre a reta ser ilimitada e o segmento de reta ter inicio e fim?

Imagine uma rua bem longa da sua cidade, e você está em uma esquina, você olha para os lados e não vê o início e nem o fim da rua, mas você identifica o início e o fim de cada quadra que está nessa rua, então podemos dizer que a rua é a reta, e cada quadra, que é uma parte da rua, é um segmento de reta.

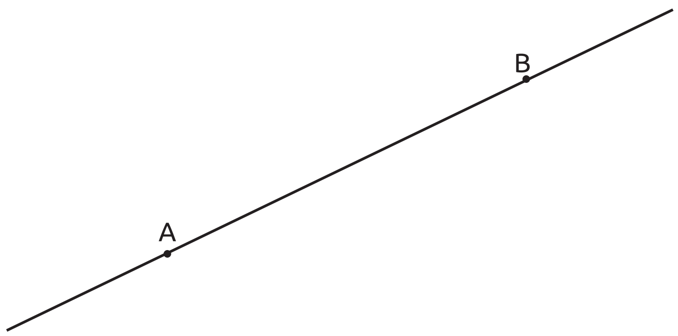


Figura 4 - Segmento de reta $\overline{AB}$

Tendo esta característica a reta nos dá a possibilidade de expandi-la, dividi-la em partes, e assim desenhar novos segmentos e criar novas figuras, como a planta da sua casa, e isto se torna uma ferramenta muito importante para a resolução de exercícios e para o entendimento da Geometria. Ao longo do livro, veremos exemplos de extrapolação de segmentos de retas, e organização de figuras que facilitam o entendimento e a resolução de problemas geométricos. Por agora, vamos nos concentrar em segmentos de retas e algumas propriedades que envolvem tanto os segmentos de retas como os pontos.

CARACTERÍSTICAS DOS PONTOS E DOS SEGMENTOS DE RETAS

Até agora tudo foi fácil, vamos concordar. Planos, pontos e retas, nada que você já não sabia. Nesse capítulo, começaremos a explorar alguns conceitos e características do que aprendemos até agora, conhecidas também como *propriedades*, essas características nos ajudam compreender da linguagem utilizada na Geometria. São muitos nomes, mas você não precisa decorar – decorar não é aprender! Não decore!. Os nomes são colocados aqui para que sirvam de referência para você, e não como material de memorização. Aqui vamos nós:

Pontos colineares, não-colineares e ponto médio: Retornemos ao nosso segmento de reta ($\overline{AB}$) do Capitulo 2, que liga os pontos A e B. Suponhamos que, nesse segmento de reta, nós escolhemos um terceiro ponto, chamaremos de ponto M, como na Figura 5.

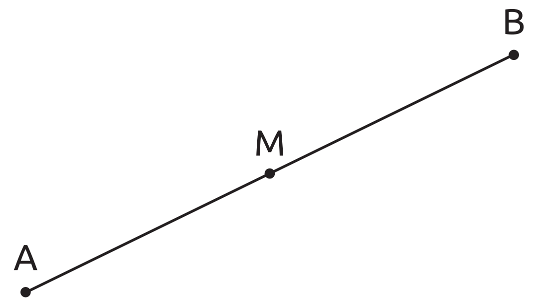


Figura 5 - Ponto M no segmento de reta $\overline{AB}$

O ponto M, A, e B estão em um mesmo segmento de reta e, portanto, são chamados de *pontos colineares* (“pontos que estão em uma ‘mesma linha’). Caso o ponto M estivesse situado em outra posição que não coincidisse com o segmento ($\overline{AB}$), os pontos M, A, e B seriam *pontos não-colineares*, como mostra a Figura 6. Note

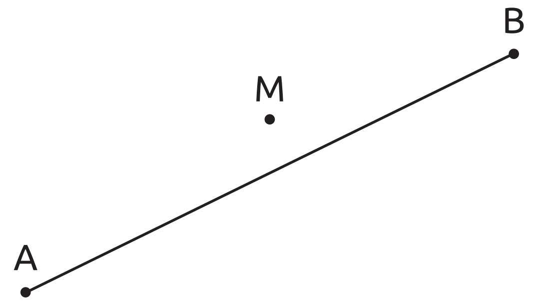


Figura 6 - pontos não colienares

que o ponto M divide o segmento de reta ($\overline{AB}$) em duas partes iguais. Assim, além do ponto M ser colinear com pontos A e B, o ponto M é também o *ponto médio* do segmento ($\overline{AB}$). Nem todo ponto colinear é *ponto médio*, obviamente, como é o caso do ponto N na figura abaixo. O ponto N é colinear com os pontos A e B, mas não divide o segmento ($\overline{AB}$) no meio e, portanto, não é considerado ponto médio.

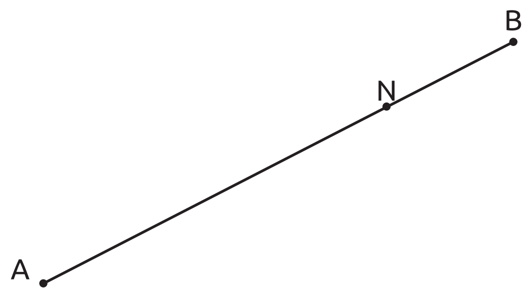


Figura 7 -Ponto N na reta $\overline{AB}$

Segmentos consecutivos e não-consecutivos: Agora consideremos um segmento de reta ($\overline{AB}$), onde os pontos colineares A, B, M e N estão situados como na Figura 8.

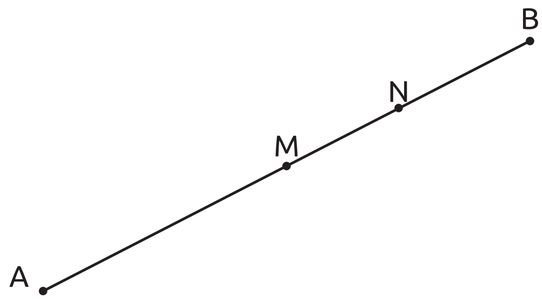


Figura 8 - segmento de reta $\overline{AMNB}$

Note que, assim como consideramos os pontos A e B como pontos de partida e chegada para desenhar o segmento ($\overline{AB}$), é possível aplicar a mesma lógica para desconstruir o segmento ($\overline{AB}$) de acordo com os novos pontos M e N. Por exemplo, sabemos que o segmento ($\overline{AB}$) é a soma do segmento ($\overline{AM}$), ($\overline{MN}$) e ($\overline{NB}$), pois esses três segmentos juntos são exatamente iguais ao segmento ($\overline{AB}$), como mostra a figura 9.

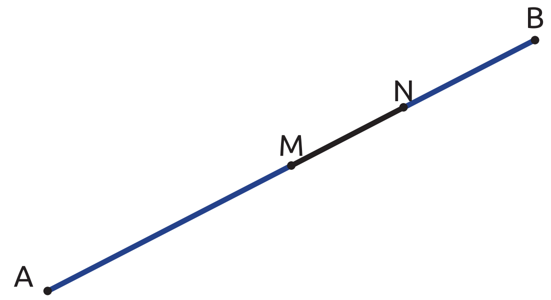


Figura 9 - segmentos de reta $\overline{AM}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NB}$

Pela figura, fica claro que os segmentos ($\overline{AM}$), ($\overline{MN}$) e ($\overline{NB}$) estão "justapostos" (um colado ao outro, não há espaço entre eles). Assim, esses segmentos são *segmentos consecutivos* ("um segmento começa onde o outro segmento termina, sem espaço entre eles"). Para tornar a ideia de segmentos consecutivos mais concreta, imagine que seu time favorito de futebol ganhou 10 partidas seguidas. Quando isso acontece, dizemos que seu time teve 10 vitórias *consecutivas*, que significa que não houve quebra na sequência de vitórias. A ideia é a mesma para segmentos.

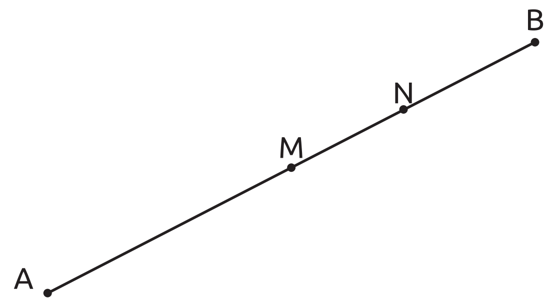
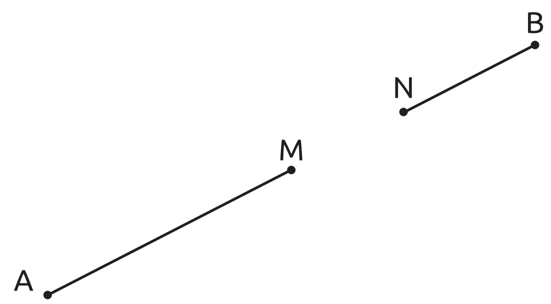


Figura 10 - Segmento de reta $\overline{AMNB}$

Quando há separação entre os segmentos, como por exemplo se ($\overline{AM}$) e ($\overline{NB}$) estivessem separados, esses segmentos seriam *segmentos não-consecutivos*, como mostra a figura 11.

Figura 11 - Segmentos não consecutivos



Segmentos colineares e não-colineares: Assim como pontos, segmentos também podem ser considerados colineares ou não-colineares. A lógica é a mesma: quando segmentos se encontram numa mesma linha, eles são *segmentos colineares*, e quando não, são segmentos *não-colineares*. Entretanto, é bom ficar atento ao seguinte aspecto: segmentos podem ser *não-colineares* e ainda sim serem *consecutivos*. Por exemplo, a figura 12 mostra segmentos de reta que são *consecutivos* (o ponto de chegada de um segmento é o ponto de partida de outro), mas que são *não-colineares*, pois os segmentos não se situam em uma mesma linha. Da mesma forma, é perfeitamente possível que segmentos de reta sejam *consecutivos e colineares*, como mostra a figura 12.

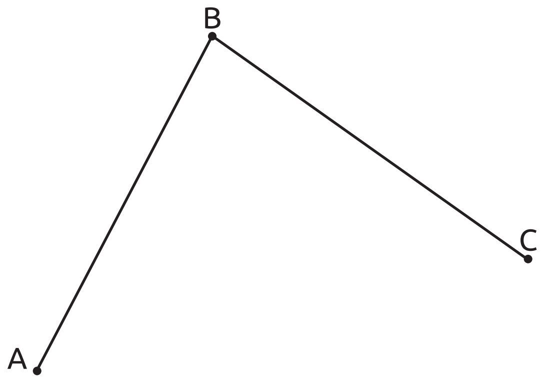
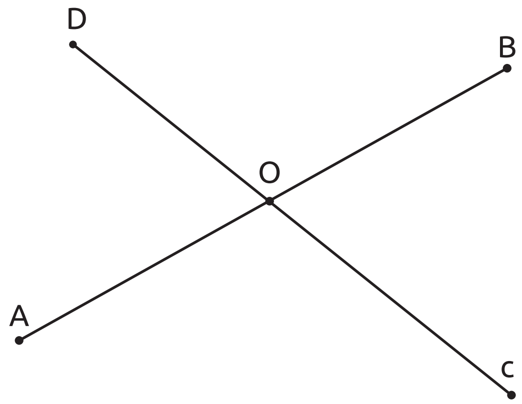


Figura 12 - Segmentos consecutivos mas não-colineares

Segmentos congruentes: São segmentos que possuem a mesma medida. Por exemplo, suponhamos que quando medimos o segmento $(\overline{AB})$ com uma régua, encontramos um valor de 5 cm. Imagine agora um outro segmento (vamos chama-lo de segmento $(\overline{CD})$)também com 5 cm. Podemos concluir então que os segmentos $(\overline{AB})$ e $(\overline{CD})$ são congruentes.

Retas concorrentes: Vamos falar agora de retas. Lembre que retas são infinitas, enquanto que segmentos são partes de uma reta que possuem um ponto de partida e de chegada. Aqui, vamos chamar a reta que contem o segmento $(\overline{AB})$ de *reta a*, e a reta que contem o segmento $(\overline{CD})$ de *reta c*. Suponhamos que as retas *a* e *c* se cruzam em um único ponto, que chamaremos de ponto O, como mostra a figura 13.

Figura 13 - Retas a e c se encontrando no ponto O



Quando retas possuem um único ponto em comum, essas retas são chamadas de *retas concorrentes*.

Note que duas retas que são concorrentes podem receber nomes diferentes, como assim?

Quando dizemos que as retas têm um ponto em comum significa que essas retas se cruzam nesse ponto, quando elas se cruzam e formam entre si um ângulo de 90 graus, elas serão *concorrentes perpendiculares*, conforme mostra a figura 14.

Figura 14 - Retas concorrentes perpendiculares

Quando as retas se cruzam e formam ângulos diferentes de 90 graus elas são chamadas de *concorrentes oblíquas*, veja na figura 15.

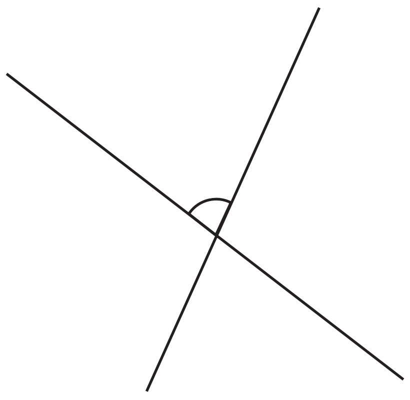


Figura 15 - Retas concorrentes oblíquas

Não se preocupe com os ângulos, no próximo capítulo você aprenderá sobre eles.

Essa definições e propriedades descritas acima nos ajudam a entender a linguagem usada na Geometria. Os conceitos são bem intuitivos, e não há necessidade de decorá-los. Entretanto, é importante saber que essas propriedades existem.

“

EDUCAÇÃO É QUE NEM MOEDA DE OURO,É VALIDA NO MUNDO TODO.”

PROVÉRBIO CHINÊS

03

ÂNGULOS

"

O ÂNGULO DA VIDA

NA VIDA TEMOS VÁRIOS ÂNGULOS
COM VÁRIAS SEMIRRETAS AOS LADOS
ALGUMAS FORMAM TRIÂNGULOS
E OUTRAS APENAS SÃO VINCULADOS

ESPEREI ALGO AGUDO
SÓ ENCONTREI O RASO
ACHEI QUE ELE TINHA TUDO
MAS ACABOU SENDO UM ARRASO

JURAVA QUE ERA UM COMPLEMENTAR
QUE MOSTRARIA O MEU COMPRIMENTO
FICOU APENAS PARA FOMENTAR
AQUELE TERRÍVEL MOMENTO

DEPOIS DE UM TEMPO ME ANIMEI
E AGORA QUERO ALGO MAIS CONFORTÁVEL
FOI AI QUE APAIXONEI
PELO ÂNGULO NOTÁVEL"

MARCELLE S. MARTINS, 1º ANO ENSINO MÉDIO, ESCOLA SESI DE SERTÃOZINHO-SP

CAPÍTULO 3
Ângulos

No capitulo anterior, vimos como pontos, segmentos de reta e retas são organizados e como podemos identificar características referentes a esses elementos. Nesse capítulo trataremos de ângulos.

Ângulos podem ser definidos como o espaço entre retas concorrentes ou entre dois segmentos de retas consecutivos. Quando medimos ângulos, nós estamos interessados na abertura (distância) entre um segmento de reta e outro, ou entre uma reta e outra. Ângulos são medidos de acordo com as intersecções, isto é, o ponto em comum entre as retas. Por exemplo, a figura 16 mostra os segmentos ($\overline{AB}$) e ($\overline{BC}$). O ponto B é a intersecção desses dois segmentos (ponto de encontro dos dois segmentos), e podemos medir a diferença na direção em que os segmentos estão apontados quando medimos o ângulo β formado entre os segmentos.

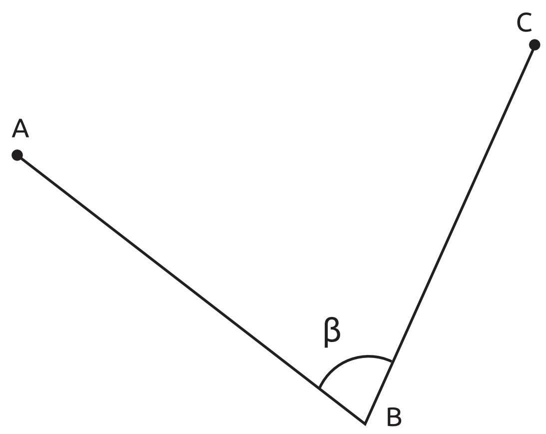


Figura 16 - Ângulo β reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$

Ângulos podem ser medidos em graus (º) e radianos (rad), assim como altura pode ser medida em centímetros ou metros, e peso pode ser medido em quilogramas ou gramas. A relação entre graus e radianos é a seguinte:

• 1 rad = 57,2958 graus

• 1 grau = 0,0174533 rad

Nós trataremos de graus e radianos mais adiante, quando falarmos de circunferências e das funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente). Por agora, é importante saber que essas são as unidades pelas quais os ângulos são estimados, e que os ângulos medem a distancia (ou diferença na direção) entre duas retas ou segmentos de retas.

Os ângulos são importantíssimos na geometria, pois podemos definir diversas propriedades da geometria, bem como teoremas e leis. Por agora, assim como fizemos no capitulo anterior, vamos ver algumas das características básicas que envolvem ângulos.

Ângulo reto: É o ângulo com valor igual a 90º.

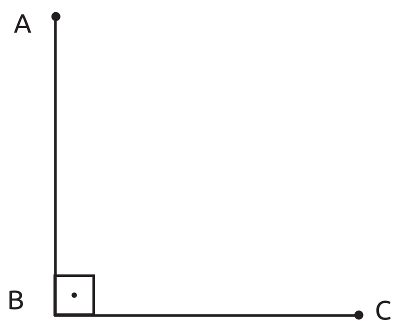


Figura 17 - Ângulo reto $A\hat{B}C$

Ângulos agudos e obtusos: Qualquer ângulo com valor menor que 90º é um ângulo agudo. Por outro lado, qualquer ângulo com valor maior que 90º é um ângulo obtuso.

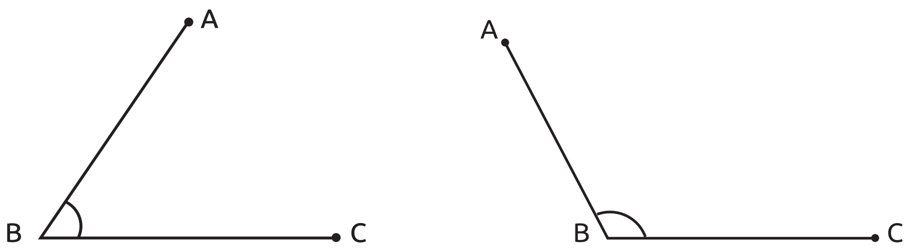


Figura 18 - Ângulo agudo e obtuso

Ângulo raso: É o ângulo que forma 180º.

Figura 19 - Ângulo raso

Os ângulos também possuem propriedades importantes para a solução de problemas geométricos.

Quando temos dois ângulos e sua soma é igual a 90º, chamamos esses ângulos de *complementares*, por exemplo, se o ângulo mede 30º o seu complementar será o ângulos de 60º, porque 30º somado a 60º é igual a 90º, conforme mostra a figura 20.

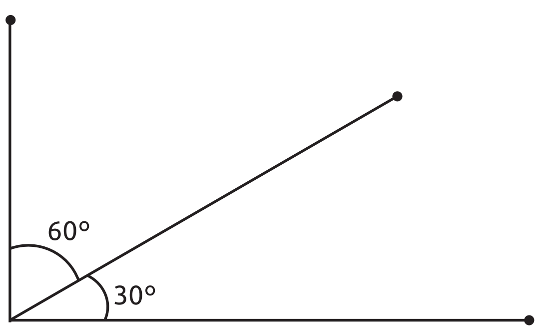


Figura 20 - Ângulos Complementares

Quando a soma de dois ângulos é igual a 180° , esses ângulos são chamados de *suplementares*, por exemplo, o ângulo suplementar de 110° é o ângulo de 70°, pois a soma dos dois é igual a 180°, mostrado na figura 21.

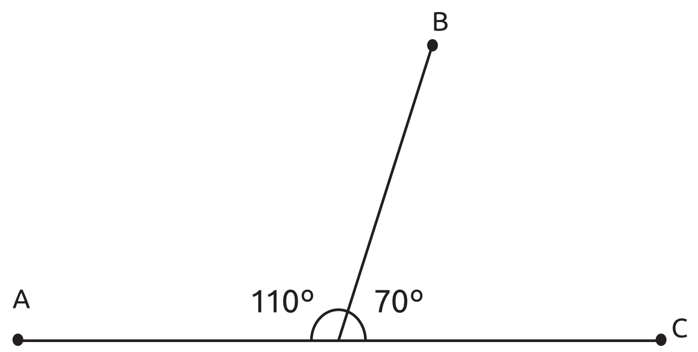


Figura 21 -Ângulos Complementares

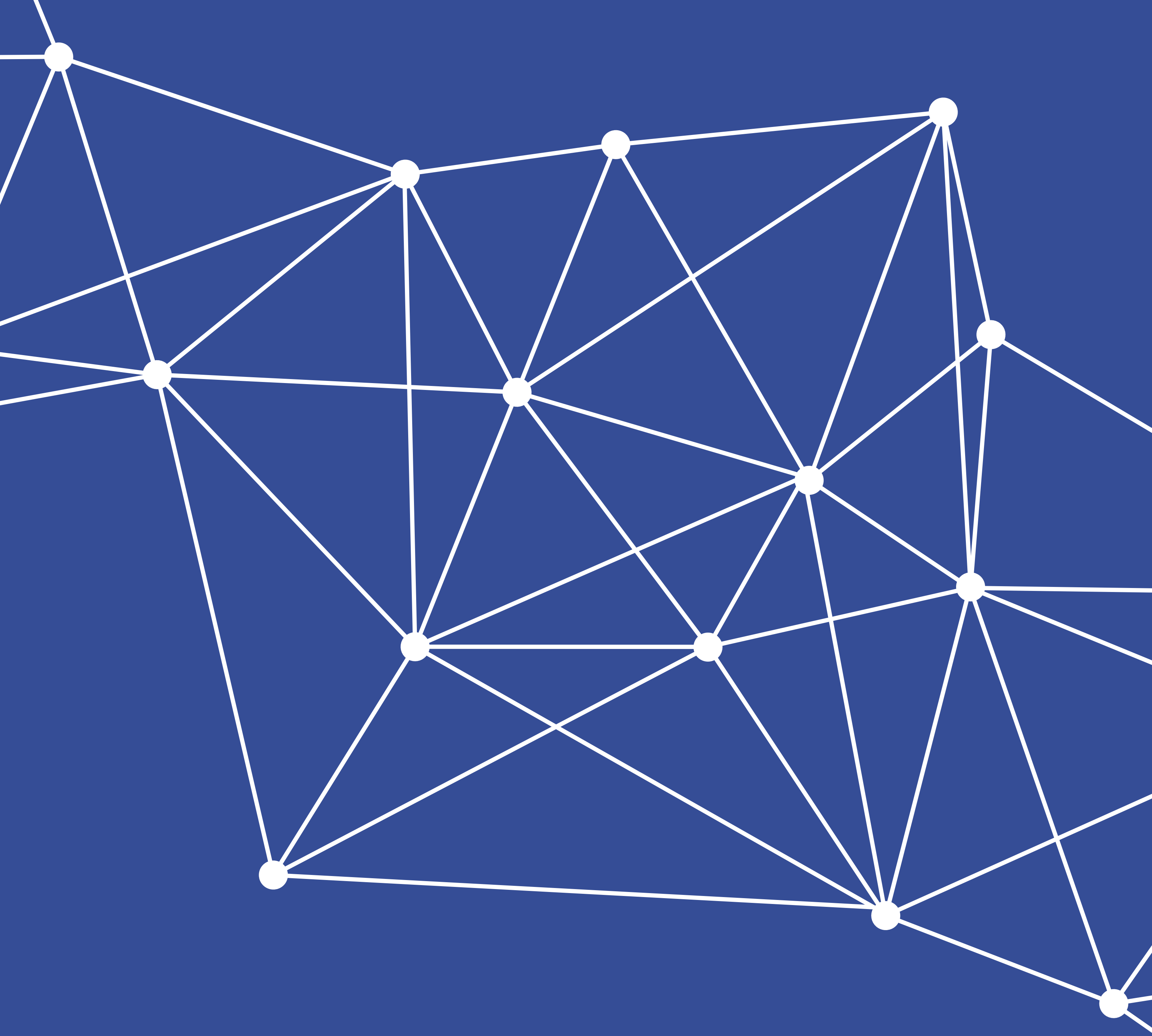
E como já foi dito anteriormente, são vários nomes mas não é necessário decorá-los, é preciso saber que eles existem e que serão utilizados nas resoluções de problemas em Geometria.

“NINGUÉM É TÃO GRANDE QUE NÃO POSSA APRENDER, NEM TÃO PEQUENO QUE NÃO POSSA ENSINAR.”

ESOPO

04

TRIÂNGULOS



“

NÃO IMPORTA O QUANTO A GENTE SE AFASTE,
NEM MESMO O QUANTO LUTEMOS PARA NOS DEFENDERMOS,
EXISTE UM PERPÉTUO CICLO, TRÊS PONTOS CRUCIAIS NO AMOR.
A ADMIRAÇÃO, O APEGO, E A DOR.
E É NESSE TRIÂNGULO QUE CONHECEMOS O NOSSO MELHOR E PIOR LADOS.”

O QUE SÃO TRIÂNGULOS?

Todos os dias nós passamos por vários lugares, muitas ruas e avenidas, vemos as casas, os prédios, as indústrias e muito mais, e em tudo que vemos, não percebemos as interações entre os elementos que formam o que vemos, nesse caminho vemos inúmeras figuras planas, aquelas formadas dentro de um plano, vistos em capítulos anteriores, essas figuras podem ser quadrados, retângulos, triângulos e tantas outras que serão tratadas mais adiante, mas uma delas é bem especial, e existe uma parte da Matemática dedicada exclusivamente a ela, então você me pergunta: que figura é essa?

Essa figura tão especial é o triângulo!

Mas o que é um triângulo? Se em uma folha em branco, o plano, você definir três pontos A, B e C, não colineares, ou seja, que não pertençam à mesma reta, ligando estes três pontos, teremos três segmentos de reta consecutivos, o segmento AB, BC e o segmento AC, a união desses três segmentos dá origem ao triângulo.

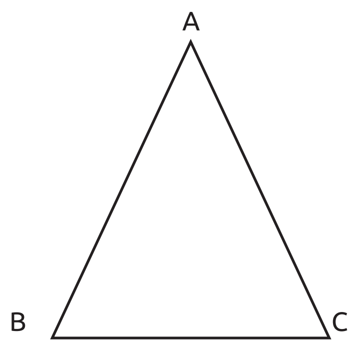


Figura 22 - Triângulo formado pelos pontos ABC

O triângulo é formado por três lados, que são os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, três vértices que são os pontos A, B e C; e por três ângulos internos, que somados são iguais a 180º. Estes são os *elementos dos triângulos.*

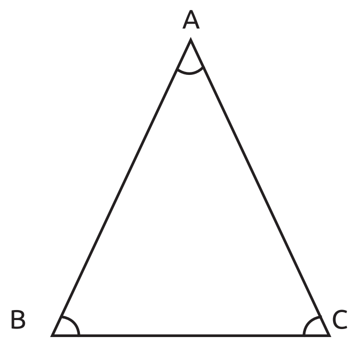


Figura 23 - Ângulos internos do triângulo

Os triângulos se tornam especiais porque são muito usados nas construções, lembrando o engenheiro que vai construir sua casa, ele precisará fazer vários cálculos matemáticos para que ela se torne uma construção segura, ele utilizará de cálculos geométricos e trigonométricos, estes baseados apenas em triângulos, estes cálculos permitirão que sua casa se torne uma estrutura rígida, sem deformações e sem perigo de "cair". Como o triângulo é uma forma que "não entorta", quantos mais triângulos forem, usados mais rígida a estrutura da casa fica.

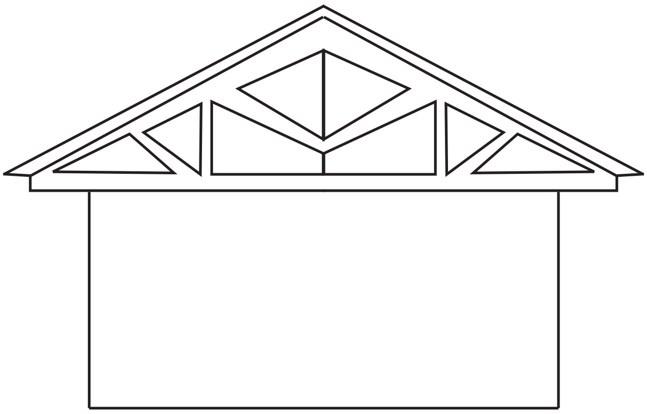


Figura 24 -Triângulos utilizados na estrutura de um telhado

TODOS OS TRIÂNGULOS SÃO IGUAIS, OU EXISTEM TRIÂNGULOS DIFERENTES?

Quando fazemos nossas observações enquanto caminhamos nas ruas de nossa cidade, conseguimos perceber que os triângulos aparecem de formas bem diferentes dependendo onde ele é usado, na forma do telhado de uma casa ou nas formas das ferragens de uma torre de antena de celular, isso acontece porque eles possuem uma classificação de acordo com a medida de seus lados, se todos os seus lados tiverem a mesma medida, eles receberão o nome de *equiláteros*, se pelo menos dois lados têm medidas iguais, serão chamados de *isósceles* e se nenhum lado tem medida igual, serão os *escalenos*, observe as diferenças nas figuras abaixo.

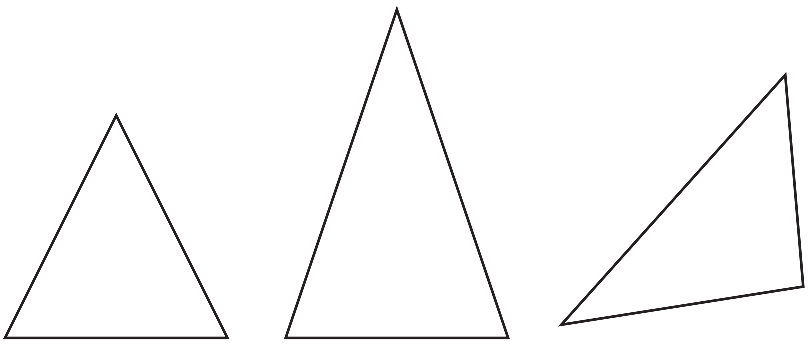


Figura 25 -Triângulo equilátero, isóceles e escaleno

Os triângulos também são classificados de acordo com seus ângulos, o mais usado e conhecido é o triângulo que possui um ângulo de 90º, o chamado *triângulo retângulo*, este por sinal, será o que mais vamos falar, porque é muito usado em várias situações.

Se o triângulo possuir todos seus ângulos internos menores que 90º ele será chamado de *acutângulo* e se possuir um ângulo maior que 90º ele será o *obtusângulo*, vale lembrar que esses nomes são apenas para comparação, não é necessário decorar, visto que o mais utilizado será o triângulo retângulo. Observe as figuras.

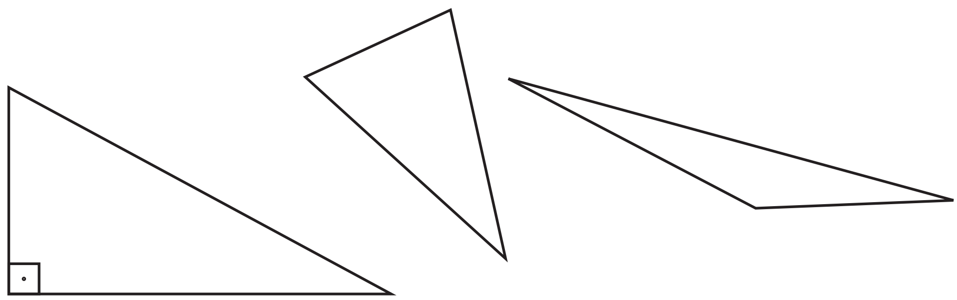


Figura 26 - Triângulo retângulo, acutângulo e obstusângulo

PARA QUAISQUER TRÊS MEDIDAS O TRIÂNGULO EXISTE?

Não necessariamente, para que seja possível construir um triângulo, é preciso que a *medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois lados e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas*, isto é chamado de Condição de existência de um triângulo.

Vamos imaginar que uma pessoa precise cercar um terreno triangular, ela fez as medidas dos lados deste terreno, as medidas encontradas foram 20m x 15m x 5m, mas será que a pessoa fez as medidas corretamente?

Para saber precisamos verificar essas medidas correspondem às condições de existência do triângulo.

Vamos verificar:

Se tentarmos desenhar esse triângulo vai ser possível perceber que ele não existe, pois dois de seus lados terão a mesma medida do terceiro lado, o que nos dará duas retas coincidentes.

Observando agora a Condição de existência: *a soma das medidas de dois lados deverá sempre ser maior que a medida do terceiro lado.*

Observe as somas dos lados:

a) 20 + 15 = 35 > 5 (atende a condição)

b) 20 + 5 = 25 > 5 (atende a condição)

c) 15 + 5 = 20 = 20 (a soma dos dois lados é igual a do terceiro lado, não atende a condição)

Portanto com essas medidas é impossível construir um triângulo, a pessoa deverá fazer uma nova medição, realmente as medidas estavam erradas, as novas medidas são 20m, 18m e 6m. E agora, será que elas estão corretas?

Vamos verificar se essas medidas estão atendendo às condições de existência do triângulo.

a) 20 + 18 = 38 > 6 (atende a condição)

b) b20 + 6 = 26 > 18 (atende a condição)

c) 18 + 6 = 24 > 20 (atende a condição)

Portanto, o triângulo existe e as medidas estão corretas.

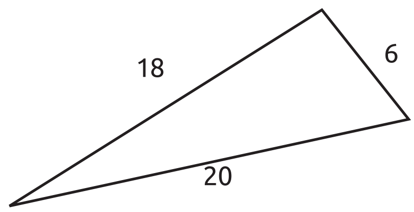


Figura 27 - Triângulo com os lados 6, 18 e 20

Então agora você já sabe como provar a existência de um triângulo, e a cada momento mais coisas interessantes vão surgindo.

CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Ahh essas palavras difíceis... Com certeza você deve estar se perguntando, o que significa isso? O que é congruência?

A palavra congruência tem o mesmo significado de igualdade, então, sempre que aparecer a palavra *congruência* ou *côngruo* você saberá que diz respeito a duas coisas iguais.

No nosso estudo de triângulos verificaremos que dois triângulos serão congruentes se possuírem, de maneira ordenada, lados e ângulos correspondentes iguais.

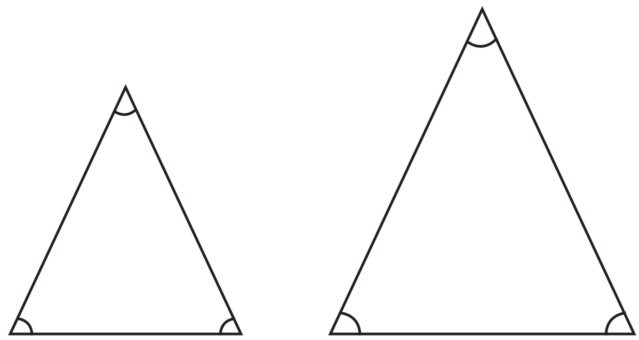


Figura 28 - Triângulos congruentes

Normalmente são utilizados “tracinhos” para indicar os lados e os ângulos que são iguais.

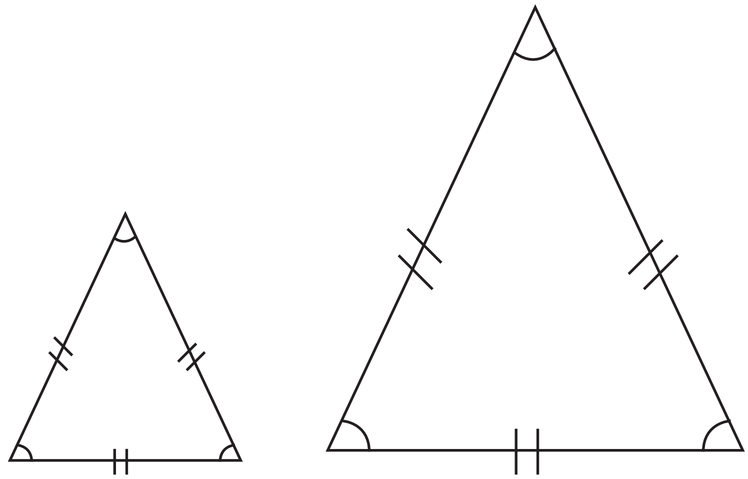


Figura 29 - Triângulos congruentes com indicação de lados iguais

Para saber mais sobre a congruência precisamos conhecer os casos de congruência de triângulos. São três casos de congruência.

Lembre-se: congruente é a forma matemática de dizer igual.

1º caso – LAL – (lado, ângulo, lado)

Dois triângulos são congruentes se os dois tiverem dois lados respectivos congruentes e os ângulos formados entre esses lados também forem congruentes

2º caso – ALA – (ângulo, lado, ângulo)

Dois triângulos são congruentes se os ângulos respectivos deles forem congruentes e os lados entre esses ângulos também forem congruentes.

3º caso – LLL – (lado, lado, lado)

Dois triângulos são congruentes quando todos os seus respectivos lados são congruentes.

Através desses casos podemos, então, analisar os triângulos e concluir se são ou não congruentes, mas vale lembrar que o mais importante é você saber que dois ou mais triângulos são congruentes se seus lados e ângulos correspondentes forem iguais, os casos de congruências citados são referências e não precisam ser decorados.

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Este triângulo é tão especial que tem um capítulo só para ele!!!

Mas o que faz o triângulo retângulo ser tão especial?

Os triângulos retângulos são muito especiais porque através das relações entre seus lados, muitos cálculos podem ser feitos, e muitas situações em diferentes casos podem ser solucionadas.

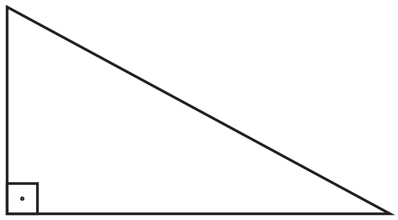


Figura 30 - Triângulo retângulo

Uma pequena curiosidade sobre o estudo dos triângulos:

O ramo da Matemática que estuda o triângulo é conhecido como trigonometria. A trigonometria tem muitas aplicações práticas, desde a antiguidade ela é usada para medir distâncias inacessíveis, ou seja, distâncias que não são possíveis de serem medidas manualmente, como a altura de uma montanha, a largura de um grande rio, entre outras coisas. Para se ter uma ideia da importância da trigonometria, os gregos antigos conseguiram medir a circunferência da Terra e a distância da Terra à Lua, usando conceitos simples de trigonometria.

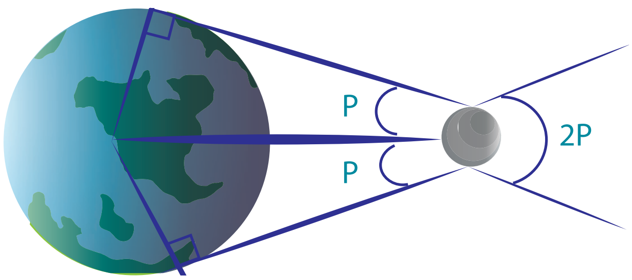


Figura 31 - Exemplo de cálculo de distância com triângulo retângulo

CAPÍTULO 4
Triângulos

Para início de conversa vamos lembrar que o triângulo retângulo possui um ângulo reto, e os outros dois ângulos somam 90º.

Os lados do triângulo retângulo recebem nomes especiais, e estes devem ser lembrados para poder resolver situações-problema mais adiante.

Os lados que partem do vértice que forma o ângulo de 90º são chamados de catetos, o lado inclinado que liga os dois *catetos* e que é oposto ao ângulo de 90º é chamado de *hipotenusa*, que também é o maior lado do triângulo retângulo, conforme podemos verificar na figura 32.

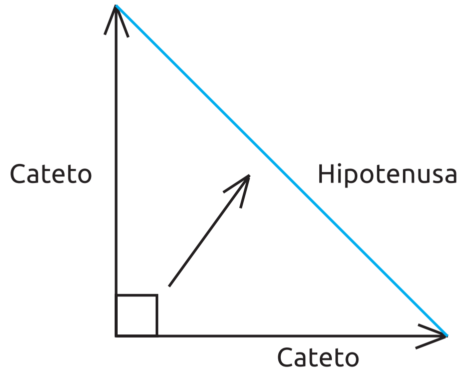


Figura 32 -Hipotenusa e catetos

O cateto do triângulo retângulo pode ser *oposto* ou *adjacente*. Você pode perguntar como saber qual é o oposto e qual é o adjacente, bem a primeira coisa é estabelecer o ângulo a ser estudado, pois os catetos serão reconhecidos em relação a este ângulo.

Oposto é o cateto que está exatamente à frente do ângulo, observe a figura 33.

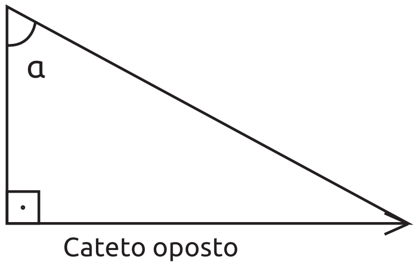


Figura 33 - cateto oposto

Adjacente é o cateto que “toca” o ângulo, que passa ao lado do ângulo, observe a figura 34.

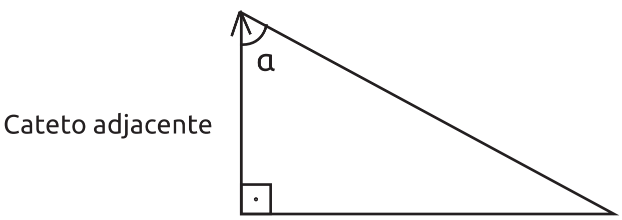


Figura 34 - cateto adjacente

Agora que você já conhece e reconhece um triângulo retângulo, vamos conversar sobre as relações que existem entre os elementos desse triângulo.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

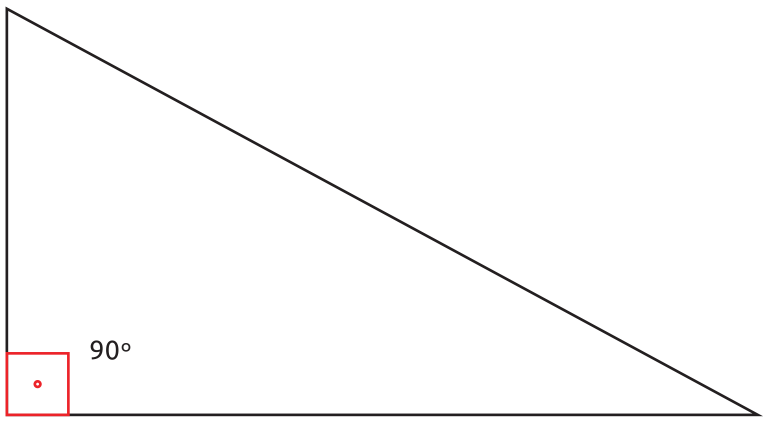


Figura 35 - Ângulo de 90° no triângulo retângulo.

O cateto pode ser oposto ou adjacente.

Oposto significa situado à frente, que está em frente, então o *cateto oposto* é o cateto que está à frente do ângulo estudado.

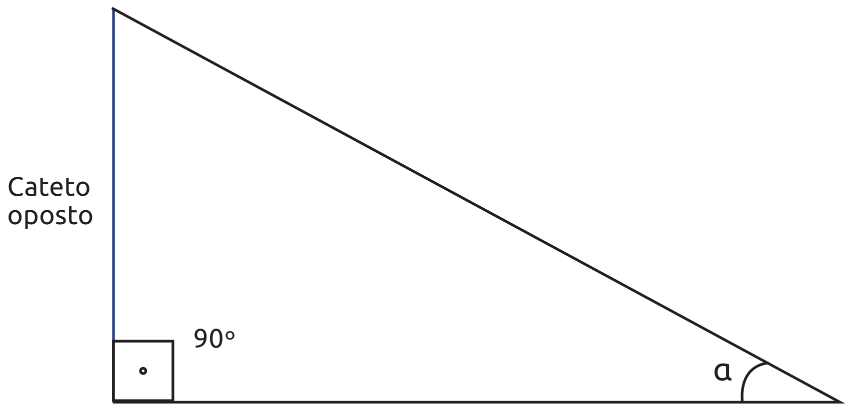


Figura 36 - O cateto oposto é o cateto que está à frente do ângulo estudado.

Mas e adjacente o que é isso?

A palavra adjacente significa, está ao lado, junto de, então o *cateto adjacente* é aquele que está ao lado do ângulo estudado, que toca o ângulo. Como representado na figura 37.

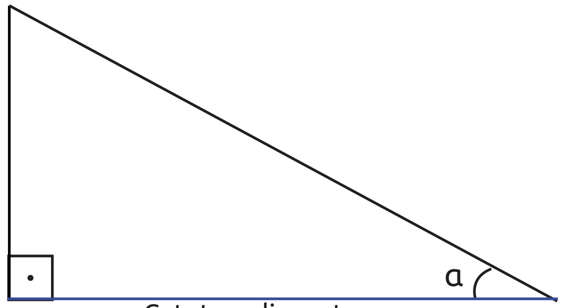


Figura 37 - O cateto adjacente é aquele que está ao lado do ângulo estudado, que toca o ângulo.

Mas para que nomes tão difíceis de se guardar?

Por que esses nomes são usados desde a antiguidade, e por razões práticas nunca foram mudados.

Mas ainda falta um lado do triângulo retângulo. Este é o lado mais prático de se guardar, pois ele é o maior lado do triângulo retângulo, também é o lado que liga os dois catetos e é o lado inclinado do triângulo, ele é a hipotenusa.

A palavra hipotenusa, também de origem grega, significa contrário à. Então, fica bem fácil de definir quem é a hipotenusa, é o lado contrário ao ângulo reto, oposto ao ângulo reto.

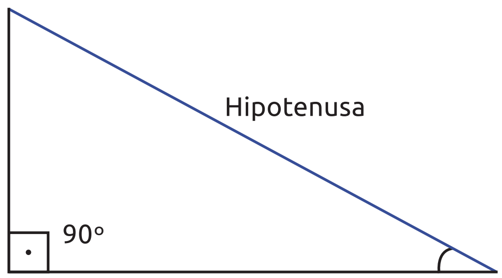


Figura 38 - A hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto.

O triângulo retângulo possui um ângulo reto de 90º, e dois ângulos agudos, que são menores que 90º. Esses dois ângulos agudos somam 90º, por isso são chamados de *ângulos complementares*.

As somas de todos os ângulos internos do triângulo é igual a 180º.

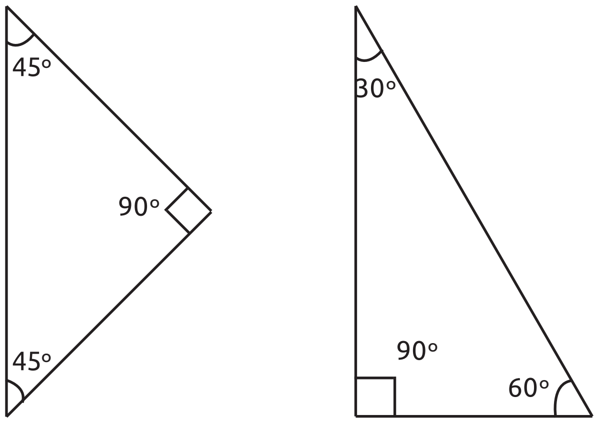


Figura 39 - As somas de todos os ângulos internos do triângulo é igual a 180º.

Agora que você já conhece cada elemento do triângulo, vamos fazer uma padronização para facilitar o estudo. Chamaremos a hipotenusa de lado a, e os catetos de lados b e c, sendo o lado a oposto ao ângulo A (ângulos reto); o lado b oposto ao ângulo B e o lado c oposto ao ângulo C.

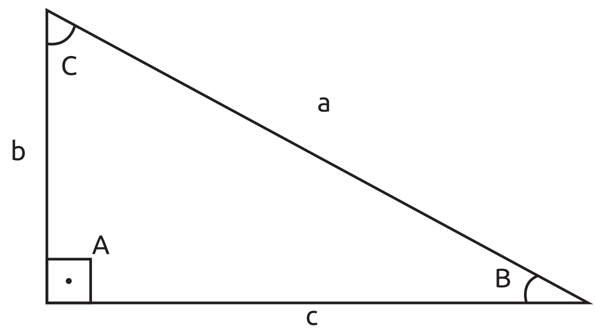


Figura 40 - Representação dos ângulos e lados por letras.

05

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

“

NÃO HÁ MAIOR JUSTIÇA PARA COM A VIDA QUE VIVER COM ÉTICA.
NÃO AQUELA APRENDIDA NA ESCOLA. OU NA UNIVERSIDADE.
MAS SIM A ÉTICA DE DENTRO.
É SABER QUEM SOMOS, O QUE SOMOS, E ONDE VAMOS.
É IR ATRÁS DOS SONHOS MAIS MALUCOS, SEM USAR PESSOAS NO CAMINHO.
É SABER QUE TANTO AS SEMELHANÇAS COMO AS DIFERENÇAS QUE NOS TORNAM ESPECIAIS.”

CAPÍTULO 5
Semelhança de triângulos

Você já conhece os triângulos congruentes, mas existem outros tipos de triângulos que são bem interessantes também, são os triângulos semelhantes. Mas o que tem de diferente entre os triângulos congruentes e os triângulos semelhantes?

Bom, os triângulos congruentes, já estudados, têm lados e ângulos correspondentes iguais, já os triângulos semelhantes possuem ângulos correspondentes iguais e os lados correspondentes proporcionais. O que significa dizer que os lados correspondentes são proporcionais?

Para que dois lados sejam proporcionais é necessário que a divisão entre eles seja sempre igual, ou seja, se pegarmos cada lado de um triângulo e dividir suas medidas pelas medidas dos lados correspondentes do outro triângulo, e o resultado for o mesmo, dizemos que os lados são proporcionais, esse valor é chamado de constante proporcional (K) ou constante de proporcionalidade, observe a figura:

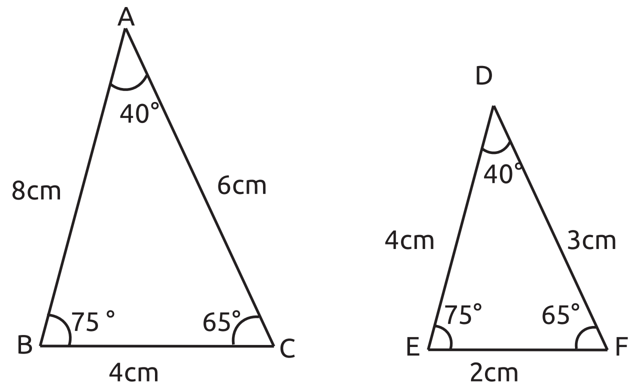


Figura 41 - Proporcões de triângulos

Observando a figura acima, perceba que ambos os triângulos foram colocados de forma que seus ângulos correspondentes ficassem na mesma posição, isso para que a visualização dos lados correspondentes fique mais fácil, vamos ver se os lados tem proporcionalidade, para isso vamos dividir as medidas de seus lados correspondentes:

$\frac{4}{2} + \frac{6}{3} + \frac{8}{4} = K$

$2 = 2 = 2 = k$

Como a divisão de seus lados correspondentes todas foram iguais a 2, temos que os triângulos são semelhantes com constante de proporcionalidade igual a 2.

Portanto os lados são proporcionais, o que significa que o triângulo ΔABC é duas vezes maior que o triângulo ΔEDF ou que o triângulo ΔEDF é duas vezes menor que o triângulo ΔABC

Para mostrar que dois triângulos são semelhantes usa-se o símbolo (~). ΔABC ~ ΔEDF (o triângulo ΔABC é semelhante ao triângulo ΔEDF).

Observação: Lados e ângulos correspondentes também são chamados de homólogos.

Para que você perceba mais claramente se dois triângulos são ou não semelhantes, existe uma forma bem simples de análise, que são os casos de semelhança de triângulos, que são:

1º Caso ângulo ângulo (AA)

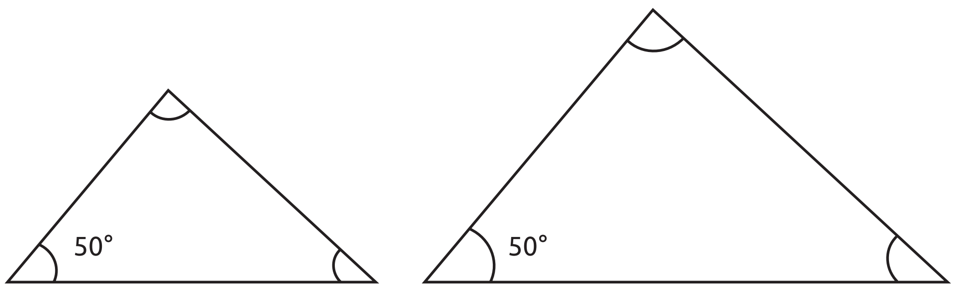


Figura 42 - Semelhança ângulo ângulo

Esse caso é o mais simples, pois se você observar dois triângulos e perceber que ambos tenham dois ângulos correspondentes iguais, já é o suficiente para que eles sejam semelhantes.

2º Caso lado lado lado (LLL)

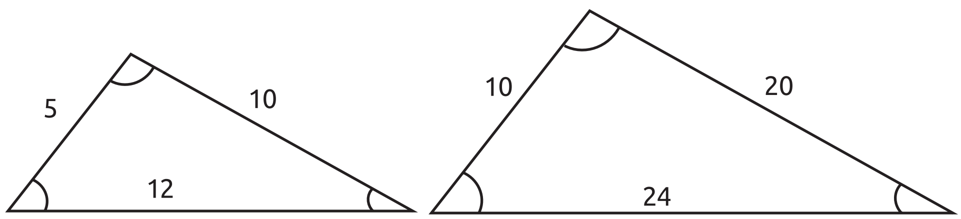


Figura 43 - Semelhança por lado lado lado

Este caso é usado quando não se tem os valores dos ângulos do triângulo, então tem que se observar se os três lados são proporcionais, se isso acontecer, os triângulos são semelhantes.

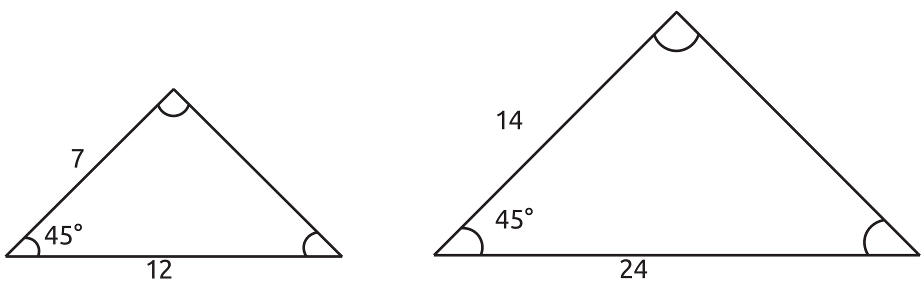


Figura 44 -semelhança por lado ângulo lado

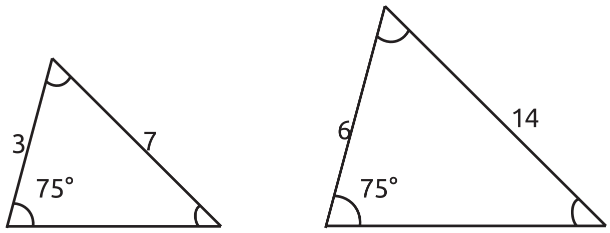


Figura 45 - semelhança por lado ângulo lado.

3º caso lado ângulo lado (LAL)

Se dois triângulos tem lados correspondentes proporcionais e os ângulos entre eles forem iguais, estes triângulos serão semelhantes.

Estes casos ajudam muito a reconhecer um triângulos semelhante, porém, o principal é você perceber que serão semelhantes quaisquer triângulos que têm ângulos correspondentes iguais e lados (homólogos) correspondentes proporcionais.

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

As relações são muito importantes em nossas vidas, precisamos nos relacionar com outras pessoas, conviver com elas, nos socializar para poder viver de forma harmônica, as relações interpessoais fazem parte de nossas vidas, manter relações nos faz dividir nossas angústias e sucessos com outras pessoas e isso nos faz bem.

"Tá louco rapaz!!! O que isso tem com Matemática?"

Então, as relações também são mencionadas para mostrar que existem conexões entre dois ou mais elementos, é ai que entra a relação em Matemática.

Quando se diz que existe uma relação entre medidas, significa que duas ou mais medidas estão conectadas entre si.

As relações métricas nos triângulos retângulos são as relações entre seus lados e outros lados do mesmo triângulo, ou entre ângulos e lados.

No capítulo anterior você conheceu os lados do triângulo retângulo, relembrando, os dois lados que partem do vértice do ângulo de 90º são os catetos e o lado que liga esses dois catetos, que está oposto ao ângulo de 90º é a hipotenusa, para que você entenda as relações métricas, é preciso lembrar bem destes nomes, observe a figura 46.

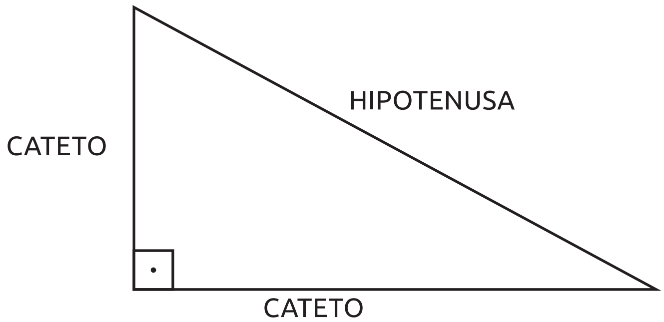


Figura 46 - Triângulo Retângulo

A primeira relação métrica e uma das mais importantes é a relação que chamamos de ***Teorema de Pitágoras.***

Pitágoras foi um dos grandes filósofos e matemáticos da Grécia Antiga, e é dado a ele a dedução dessa relação, existem várias fontes de pesquisa sobre sua biografia, vale a pena você dar uma pesquisada!

Mas o que é o Teorema de Pitágoras?

É a relação que diz que *"A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa".*

$Hip^2 = cat^2 + cat^2$

Chamando a hipotenusa de lado a, e os catetos de lados b e c, temos:

$A^2 = b^2 + c^2$

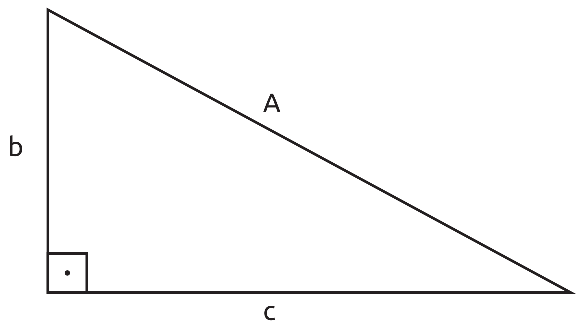


Figura 47 - Catetos e Hipotenusa

Uma outra curiosidade que vale a pena, essa relação é chamada de Teorema porque ela pode ser usada para resolver qualquer triângulo retângulo, e foi através deste teorema que os números irracionais foram descobertos, quando foi calculada a hipotenusa de um triângulo de lado 1, chegou a $\sqrt{2}$, que foi o primeiro número irracional conhecido.

O triângulo retângulo mais conhecido é o que possui catetos de medidas iguais a 3 e 4 e hipotenusa igual a 5, também chamado de terno pitagórico ou triângulo pitagórico, existem outros, mas esse é o mais utilizado, porque vários triângulos são múltiplos desse terno, e você percebendo isso nem será necessário utilizar o teorema para resolvê-lo, observe as figuras:

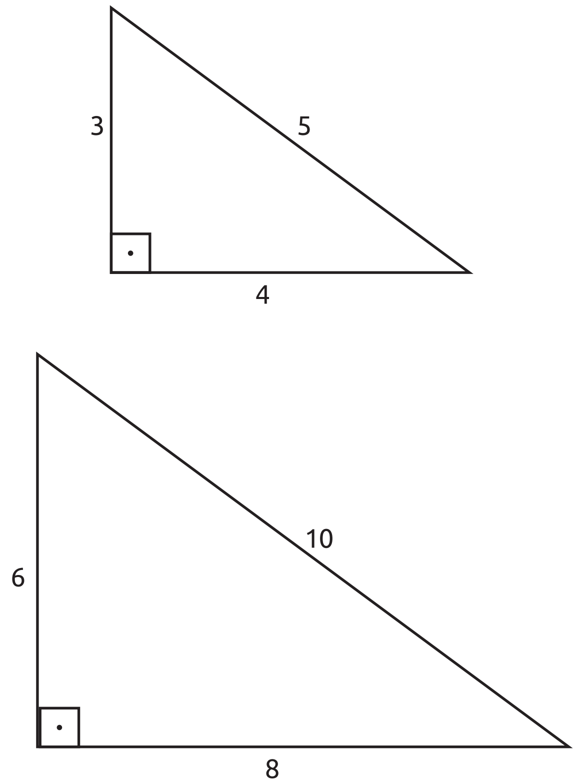


Figura 48 - Um triângulo retângulo 3,4,5 e um triângulo 6, 8, 10.

Perceba que o a segunda figura, é exatamente o dobro do triângulo inicial.

Agora tente resolver.

Um triângulo tem catetos medindo 12 e 16, qual é a medida da hipotenusa?

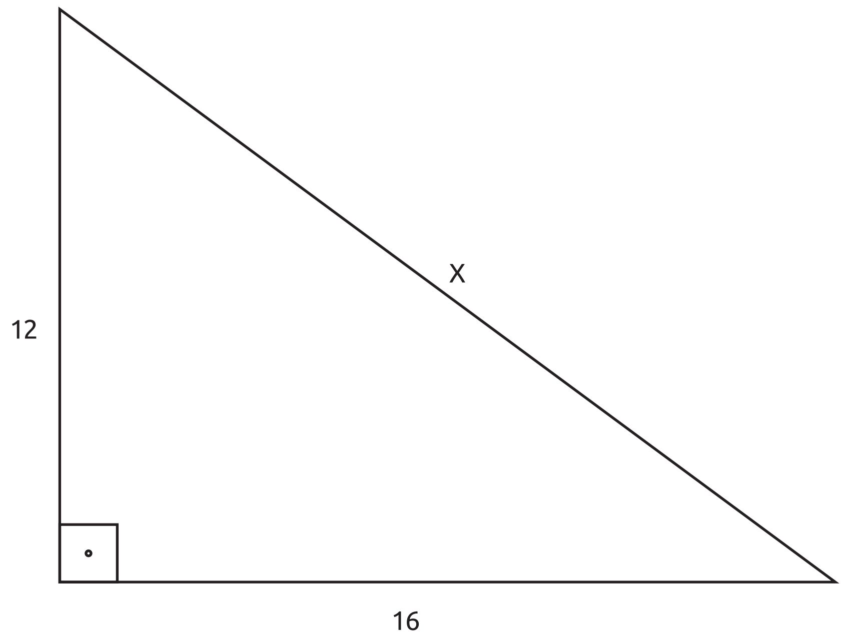


Figura 49 - Triângulo retângulo

Resolução: Você pode perceber que as medidas dos catetos são 4 vezes maior que o triângulo 3, 4, 5; então chega-se a conclusão que:

12 = 3 x 4

16 = 4 x 4

A hipotenusa será 5 x 4 = 20.

E é possível verificar esse resultado através do Teorema, observe:

$A^2 = b^2 + c^2$

$A^2 = 12^2 + 16^2$ (lembre-se, um número ao quadrado é igual a ele vezes ele mesmo, 12 x 12 e 16 x 16)

$A^2 = 144 + 256$

$A^2 = 400$

$A = \sqrt{400}$

$A = 20$

Conferido, nesse caso você decide se usa o Teorema ou a proporcionalidade do triângulo pitagórico. Lembre-se que existem vários caminhos para se chegar a mesma conclusão.

Continuando você pode perguntar: existe apenas essa relação métrica ou existem outras relações no triângulo retângulo?

Sim, existem outras, mas para conhecê-las será necessário observar outro triângulo retângulo, o que tenha traçado um segmento que liga o vértice do ângulo retângulo, que será marcada com h, e perpendicular (90º) à hipotenusa, esse segmento a dividirá em duas partes, m e n, observe a figura 50.

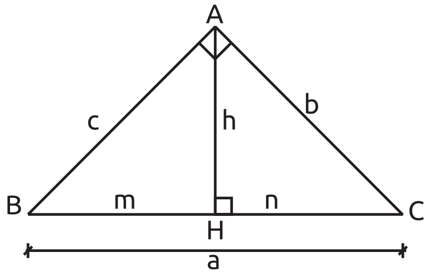


Figura 50 - Triângulo Retângulo

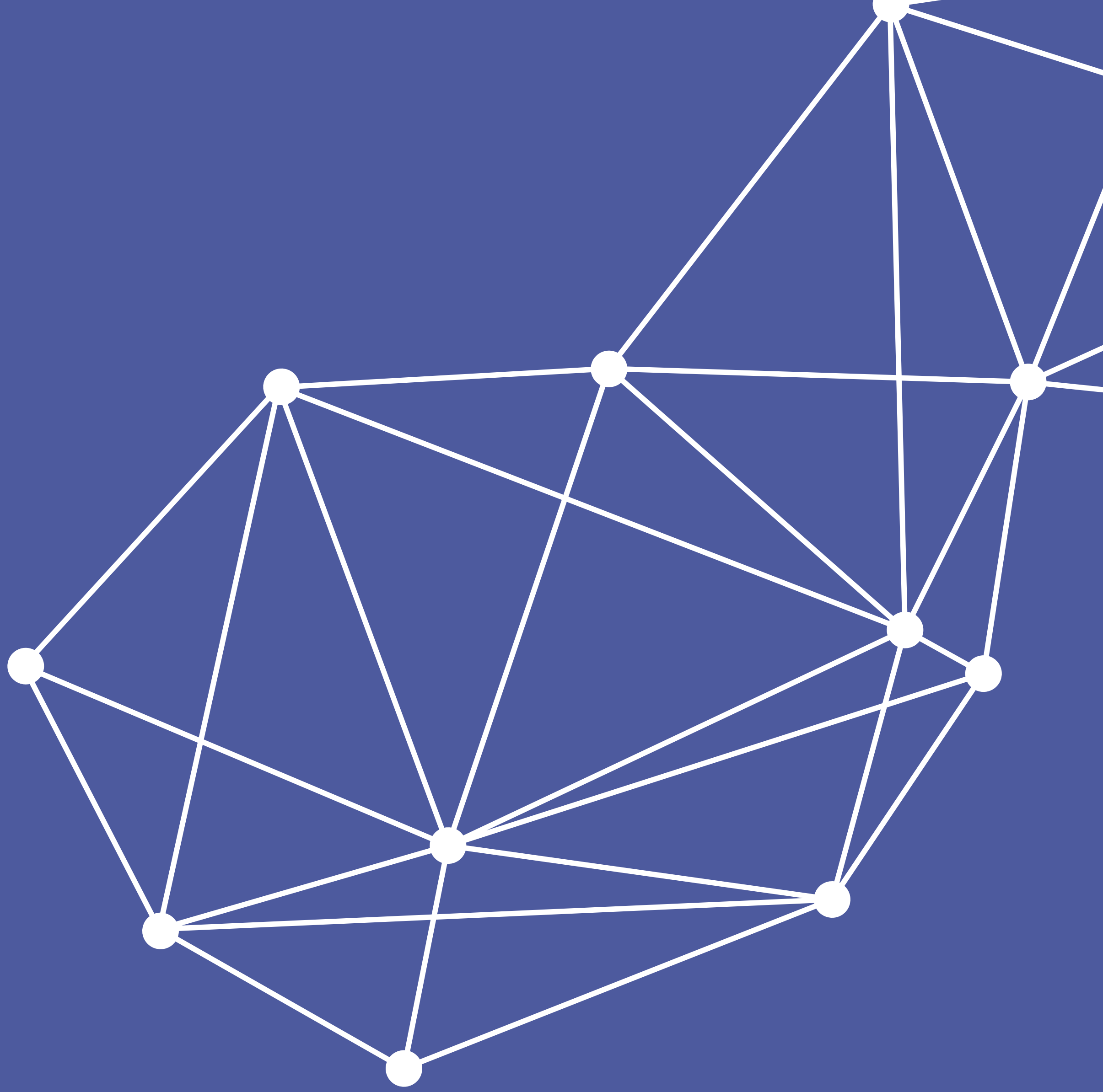
Agora podemos, então, encontrar as seguintes relações:

1) $h^2 = m.n$
2) $b^2 = m.a$
3) $c^2 = a.n$
4) $b.c = a.h$

Cada uma destas relações podem ser deduzidas e demonstradas, mas não é necessário decorá-las, pois sempre que for necessário utilizá-las para resolver algum triângulo, basta observar os dados que se tem e substituí-los na relação que melhor se adequa aos dados obtidos.

06

PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO



“

NOTE. ANOTE.
O QUE FAZER, COMO FAZER, O QUE FALAR.
O QUE VESTIR, O QUE TRAZER, O QUE LEVAR.
FALE SOBRE CLÁSSICOS, EVITE PALAVRÕES.
NÃO SUBA NA MESA, NÃO CUSPA NO CHÃO.
VIVA COMO UM REI, NÃO OLHE PARA O
HOMEM NO CHÃO.
SÃO TANTOS PONTOS NOTÁVEIS PARA OS QUAIS NÃO HÁ
EXPLICAÇÃO.”

CAPÍTULO 6

Pontos notáveis de um triângulos

"O ser, o ter e o fazer são como triângulo, no qual cada lado serve de apoio para os demais. Não há conflito entre eles".

Shakti Gawain

Imagine que você está passando por uma rua e vê três edifícios idênticos, diferenciá-los se torna bastante difícil, mas prestando bastante atenção você percebe que cada um deles tem uma marcação, um ponto ou algo que possa identificá-los, pode ser algo pequeno, mas que faz total diferença no momento de seu reconhecimento, isso parece um exemplo bobo, mas o que veremos agora é mais ou menos isso, os triângulos possuem alguns pontos que são diferenciados pelas suas linhas notáveis, essas linhas são a altura, a bissetriz, a mediana e a mediatriz, todas são segmentos de retas, mas a forma como elas são encontradas fazem toda a diferença, os pontos dos encontros de cada uma dessas linhas (encontro das alturas, das medianas, bissetrizes e mediatrizes) são chamados de *pontos notáveis dos triângulos*. Os pontos notáveis são muito importantes para o estudo dos triângulos, são chamados notáveis porque estão presentes na caracterização e formação de todo e qualquer triângulo. Tudo parece igual, mas será mesmo?

Para iniciar a nossa conversa temos que conhecer essas linhas e o que significa o encontro delas dentro de um triângulo, para cada uma delas, teremos um ponto notável diferente, vamos iniciar pela altura.

A *altura* é o segmento de reta que une um vértice ao lado oposto a ele, este lado é chamado de reta suporte da altura, formando um ângulo de 90º. Cada vértice do triângulo forma uma altura com o lado oposto (suporte), então, um triângulo possui três segmentos de reta que são as alturas. Em um triângulo de vértices A, B e C, traçando as alturas você perceberá que elas serão os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CO}$, onde $\overline{AM}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, $\overline{BN}$ é perpendicular a $\overline{AC}$ e $\overline{CO}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Observe a figura 51.

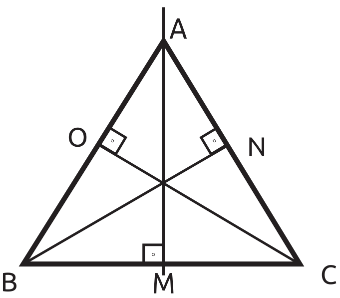


Figura 51 - Triângulo com as três alturas.

Analisando a figura você pode observar que as três alturas têm em comum um ponto, que é onde as três se interceptam (cruzam), este ponto é o notável ortocentro, que na figura 52 é identificado pelo ponto O.

A segunda linha notável no triângulo é a bissetriz do triângulo.

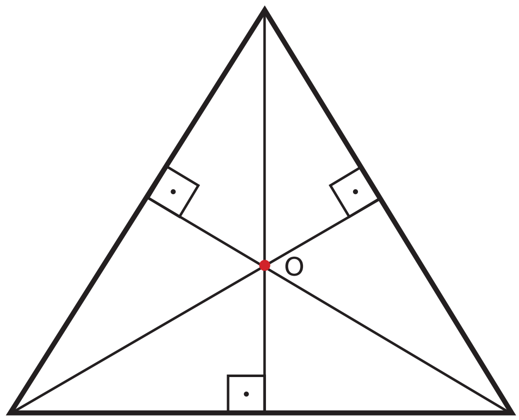


Figura 52 - Triângulo com o encontro das três alturas, com a identificação do ponto O, ortocentro.

A *bissetriz* é o segmento de reta que parte de um dos vértices do triângulo ligando-o ao lado oposto a ele, este segmento divide o ângulo ao meio, ou seja, em duas partes iguais, observe a figura com o triângulo ABC, o segmento AS é uma das bissetrizes do triângulos.

Além da bissetriz AS o triângulo possui mais duas que são os segmentos BT e CK, portanto, o triângulo possui três bissetrizes.

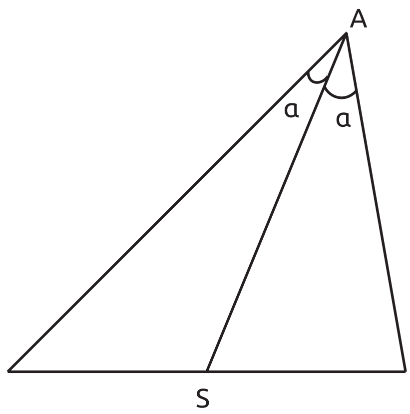


Figura 53 - Triângulo ABC com a bissetriz AS.

Em um triângulo quando são traçadas as três bissetrizes, você observará um ponto de encontro entre as três, esse ponto é o

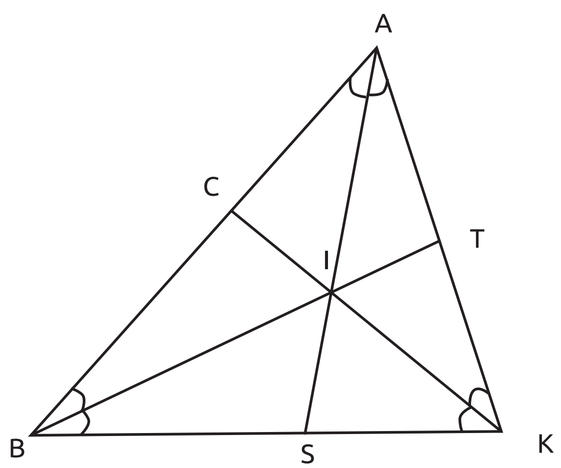


Figura 54 - Triângulo com as três bissetrizes.

notável *incentro*, representado pelo ponto I. Observe a figura 55.

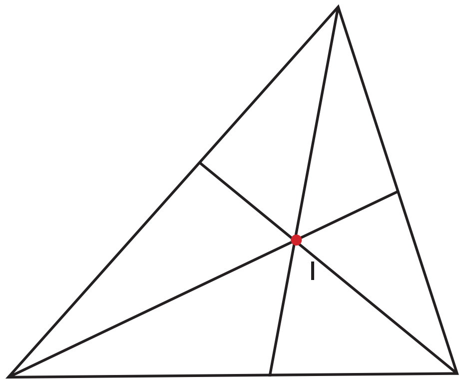


Figura 55 - Triângulo com as três bissetrizes e o ponto I, representando o incentro.

A característica mais importante do incentro é que ele é o centro de uma circunferência que fica dentro do triângulo, com um ponto tangenciando (tocando) cada um dos lados do triângulo, dizemos que essa circunferência está inscrita no triângulo.

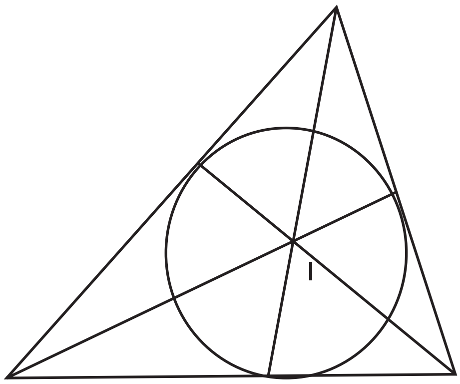
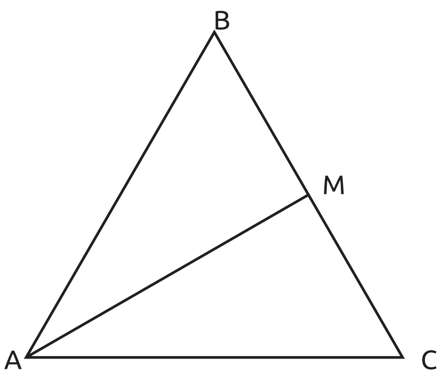


Figura 56 - Triângulo com a circunferência inscrita.

A terceira linha é a mediana do triângulo.

A *mediana* é o segmento de reta que une um dos vértices do triângulo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice, então podemos dizer que a mediana divide o lado do triângulo em duas partes iguais. No triângulo ABC abaixo, o segmento de reta $\overline{AM}$ é uma das medianas.

Figura 57 - Triângulo com a mediana AM.



Como para cada vértice existe uma mediana, temos no triângulo ABC, os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CP}$, as três medianas do triângulo.

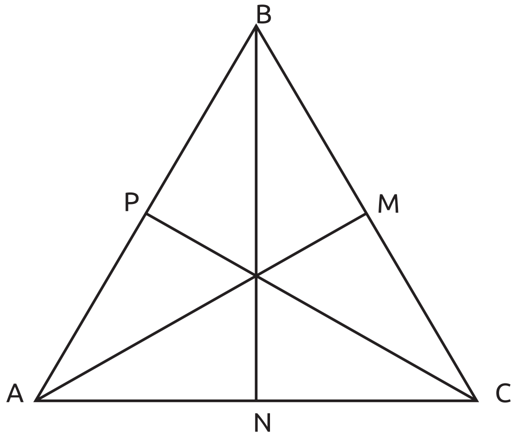


Figura 58 - Triângulo com as três medianas.

Na figura é possível notar que as três medianas se cruzam, nesse ponto de encontro das medianas, temos o ponto notável *baricentro*, representado na figura pela letra G.

Nesse caso temos uma curiosidade, a letra G, vem de gravidade, porque o baricentro é o centro de gravidade do triângulo, mas esse assunto será mais aprofundado no estudo da Geometria Analítica.

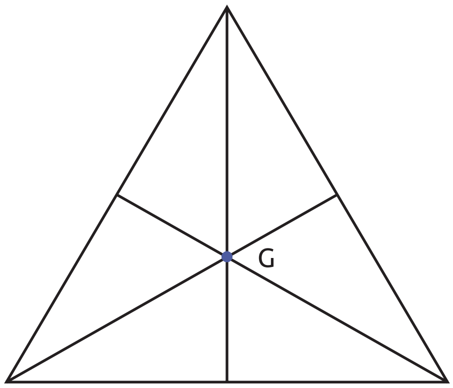


Figura 59 - Triângulo com a representação do ponto G.

Agora, observe a figura 59 e note que a distância entre o vértice e o baricentro é igual a 2/3 da medida da mediana, e que a distância entre o baricentro e o lado do triângulo é igual a 1/3 da medida da mediana.

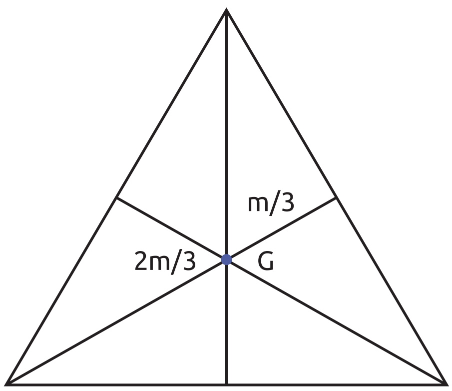


Figura 60 - Representação da proporcionalidade da mediana

CAPÍTULO 6
Pontos notáveis de um triângulos

Continuando veremos agora a última linha que nos dá o último ponto notável do triângulo. Vamos lá!

A *mediatriz* de um triângulo é a reta perpendicular (forma um ângulo de 90º) ao ponto médio de um dos lados do triângulo. O que diferencia a mediatriz da mediana é que enquanto a mediana é um segmento de reta, com início em um vértice e termino no lado oposto a esse vértice, a mediatriz é uma reta que passa pelo ponto médio do lado do triângulo, as duas tem em comum dividir o lado do triângulo em duas partes iguais.

O triângulo ABC, tem a mediatriz passando pelo ponto M do lado do triângulo.

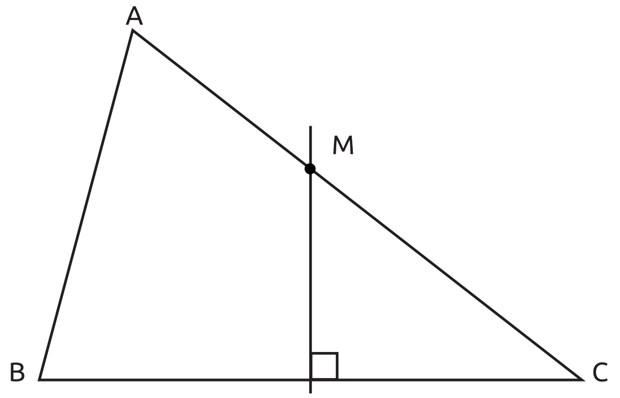


Figura 61 - Triângulo com uma das mediatrizes.

Como o triângulo tem três lados, para cada lado uma mediatriz.

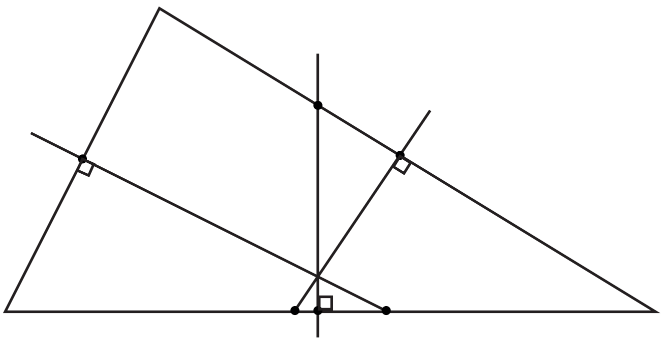


Figura 62 - Triângulo com as três mediatrizes.

O ponto de encontro das três mediatrizes do triângulo é o ponto notável *circuncentro*.

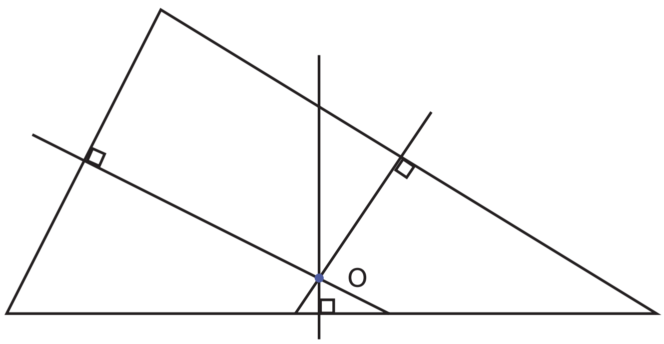


Figura 63 - Triângulo com as três mediatrizes com a marcação do ponto O do circuncentro.

O circuncentro está a uma mesma distância dos três vértices do triângulo, o que nos leva a perceber que este ponto é o centro de uma circunferência que passa pelos três vértices, ou seja, ela está circunscrita no triângulo, o triângulo está dentro dessa circunferência.

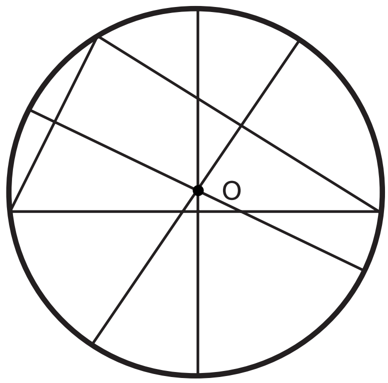


Figura 64 - Triângulo com as três mediatrizes, circuncentro e a circunferência circunscrita.

Além das linhas estudadas, vale lembrar que toda linha que parte de um vértice do triângulo e une ao seu lado oposto ou prolongamento é chamada de *cevianas*.

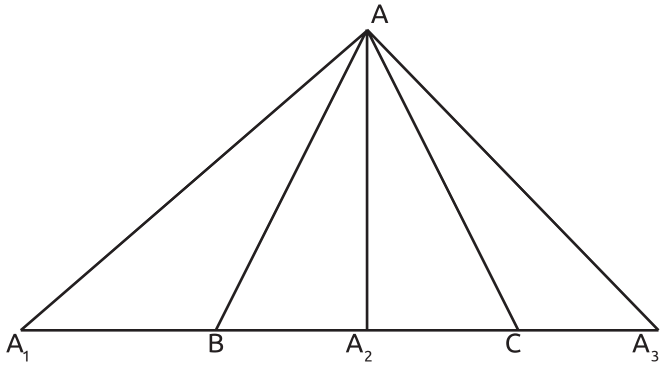


Figura 65 - Triângulo com várias cevianas.

Os triângulos são figuras fantásticas, estão em todos os lugares e existem muitos e muitos estudos sobre eles, pois existem muitas aplicações em várias áreas, como na construção civil, você pode estar se perguntando onde estão as demonstrações, mas o nosso intuito é focar nos conceitos práticos, sem as demonstrações rigorosas.

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Além das relações métricas estudadas no capítulo anterior, existem outras que são usadas quando serão relacionadas as medidas dos lados em relação ao ângulo estudado, que será chamado de ângulo de referência, essas relações podem ser representadas pelas razões seno, cosseno e tangente.

Mas o que são essas relações e para que servem?

Na antiguidade as razões trigonométricas foram utilizadas para cálculos de distâncias inacessíveis e até mesmo para calcular distâncias astronômicas, como a distância da Terra até a Lua, por exemplo, hoje utilizamos a trigonometria em várias setores como na Engenharia, topografia, na mecânica e em muitas outras, seu uso é importante para poder determinar distâncias que são difíceis ou impossíveis de se obter diretamente, como distâncias sobre um rio ou mar, altura de uma montanha entre muitas outras coisas, e isso se deve justamente porque ela nos permite estabelecer relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

Vamos então conhecer essas razões!

No capítulo anterior você viu o que é um triângulo retângulo e seus elementos, vamos revisar observando a figura 65.

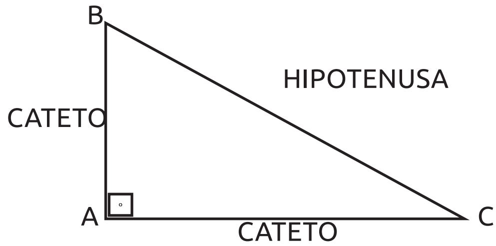


Figura 65 - Um triângulo retângulo A,B,C com ângulo reto em A, identificado os catetos e a hipotenusa.

Observando a figura vemos os vértices A, B e C, que o ângulo de 90º está em A, o segmento AB é um cateto, o segmento AC é o outro cateto e o segmento BC é a hipotenusa. Agora, vamos pensar também nos dois ângulos agudos do triângulo e vamos chama-los de α e β, sendo α o ângulo do vértice em B e β o ângulo de vértice C.

Vamos estudar três razões trigonométricas no triângulo retângulo, são elas:

Razão seno (sen): O seno de um ângulo no triângulo retângulo é a razão entre o cateto oposto ao ângulo de referência e a hipotenusa.

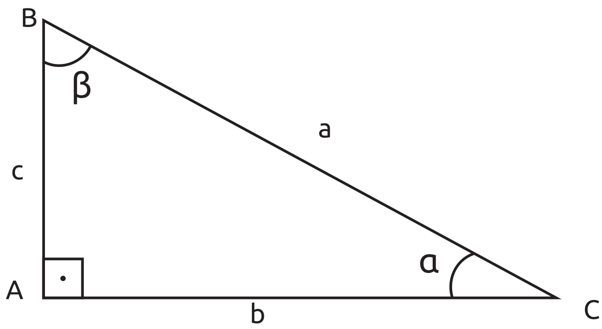


Figura 67 - Triângulo com todos os elementos, indicando os catetos e os ângulos α e β

Para cada ângulo agudo teremos uma razão seno. Observe:

Para o ângulo α:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Para o ângulo β:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Razão cosseno (cos): O cosseno de um ângulo no triângulo retângulo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa

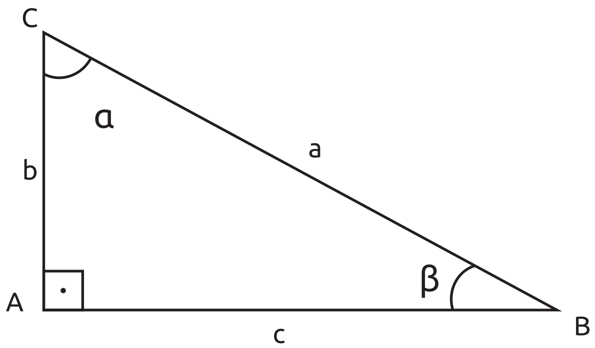


Figura 68 - Triângulo com todos os elementos, indicando os catetos e os ângulos α e β

Lembre-se que o cateto adjacente ao ângulo de referência é aquele que está ao lado do ângulo, observe a figura 68

Sempre ocorre uma dúvida, a hipotenusa não pode ser o cateto adjacente, já que ela também está do lado do ângulo?

A resposta é não, você deve lembrar que catetos sempre partem do vértice do ângulo de 90º e a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo de 90º.

Para cada ângulo agudo teremos uma razão cosseno. Observe:

Para o ângulo α:

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

Para o ângulo β:

$$\cos \beta = \frac{\text{cateto adjascente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

Você percebeu que existe uma relação bem importante entre as razões seno e cosseno?

Não?

Então observe com atenção e perceberá que o seno de um ângulo é o cosseno do seu complementar.

$\text{sen}\ \alpha = \frac{c}{a} = \cos \beta = \frac{c}{a}$, pode-se dizer que $\text{sen}\ \alpha = \cos \beta$

$\text{sen}\ \beta = \frac{c}{a} = \cos \alpha = \frac{c}{a}$, pode-se dizer que $\text{sen}\ \beta = \cos \alpha$

Essa relação será bem importante na resolução de algumas situações envolvendo o triângulo retângulo.

Razão tangente (tan): A razão tangente é a razão entre o cateto oposto ao ângulo de referência e o cateto adjacente ao ângulo de referência.

Lembre-se que o cateto oposto ao ângulo de referência é aquele que está diretamente a frente do ângulo, observe a figura 67.

Para cada ângulo agudo teremos uma razão seno. Observe:

Para o ângulo α:

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\tan \alpha = \frac{c}{b}$$

Para o ângulo β:

$$\tan \beta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{c}$$

No caso das tangentes também encontramos uma relação bastante importante;

A tangente de um ângulo será sempre igual a razão entre o seno e o cosseno deste mesmo ângulo, observe:

$\tan \alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ que fica $\tan \alpha = \frac{c/a}{b/a}$,

resolvendo a divisão de frações, encontramos:

$$\tan \alpha = \frac{c}{b}$$

o mesmo ocorre com a tangente de β.

Ângulos notáveis

Você percebeu que em todos os casos de razões trigonométricas, as relações eram entre ângulos e lados, existe uma tabela, bem grande por sinal, que é a tabela trigonométrica, nela será encontrado todos os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 0º a 90º, mas normalmente em resoluções de situações-problema que envolvem as razões trigonométricas no triângulo retângulo alguns ângulos aparecem com mais frequência, estes ângulos são chamados de ângulos notáveis e são os ângulos de 30º, 45º e 60º, seus valores são tão usados que acabam sendo memorizados, mas não se preocupe, tabelas existem para serem consultadas, a memorização acontece, mas não é necessária.

Abaixo a tabela com os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos notáveis.

	30	30°	60°
SEN	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
COS	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
TAN	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$

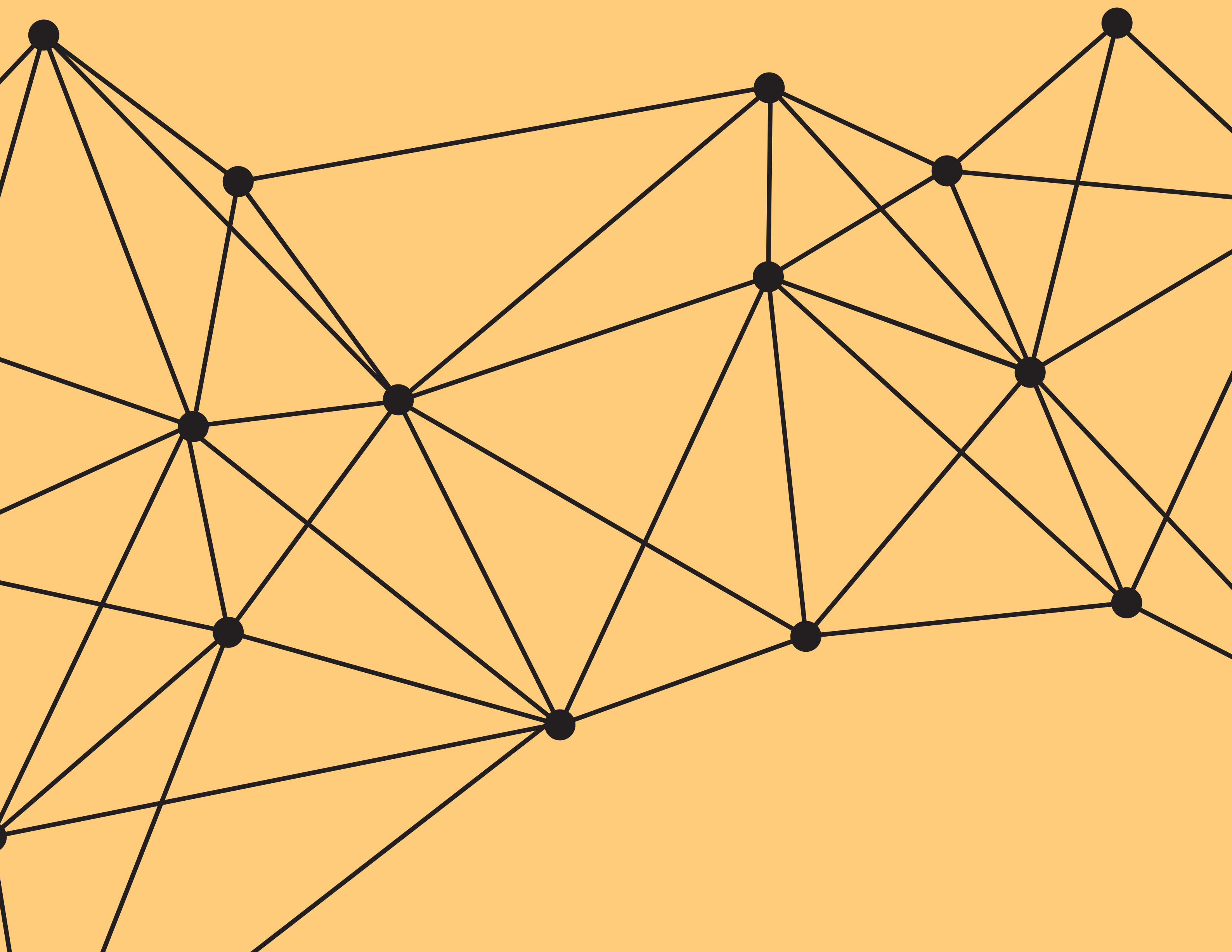
Figura 69 - Tabela com os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos notáveis.

07

QUADRILÁTEROS

“

A SIMETRIA DOCE E PERFEITA COMO A DE UM DEUS,
AFINAL, COMO SE PODE ATRIBUIR ALGO ASSIM A UMA FORMA TÃO SINGELA?
APESAR DE TODA A SIMPLICIDADE,
NO QUE NOS PASSA MAIS TRANQUILIDADE,
QUE A SOLIDEZ DE UM QUADRADO?”



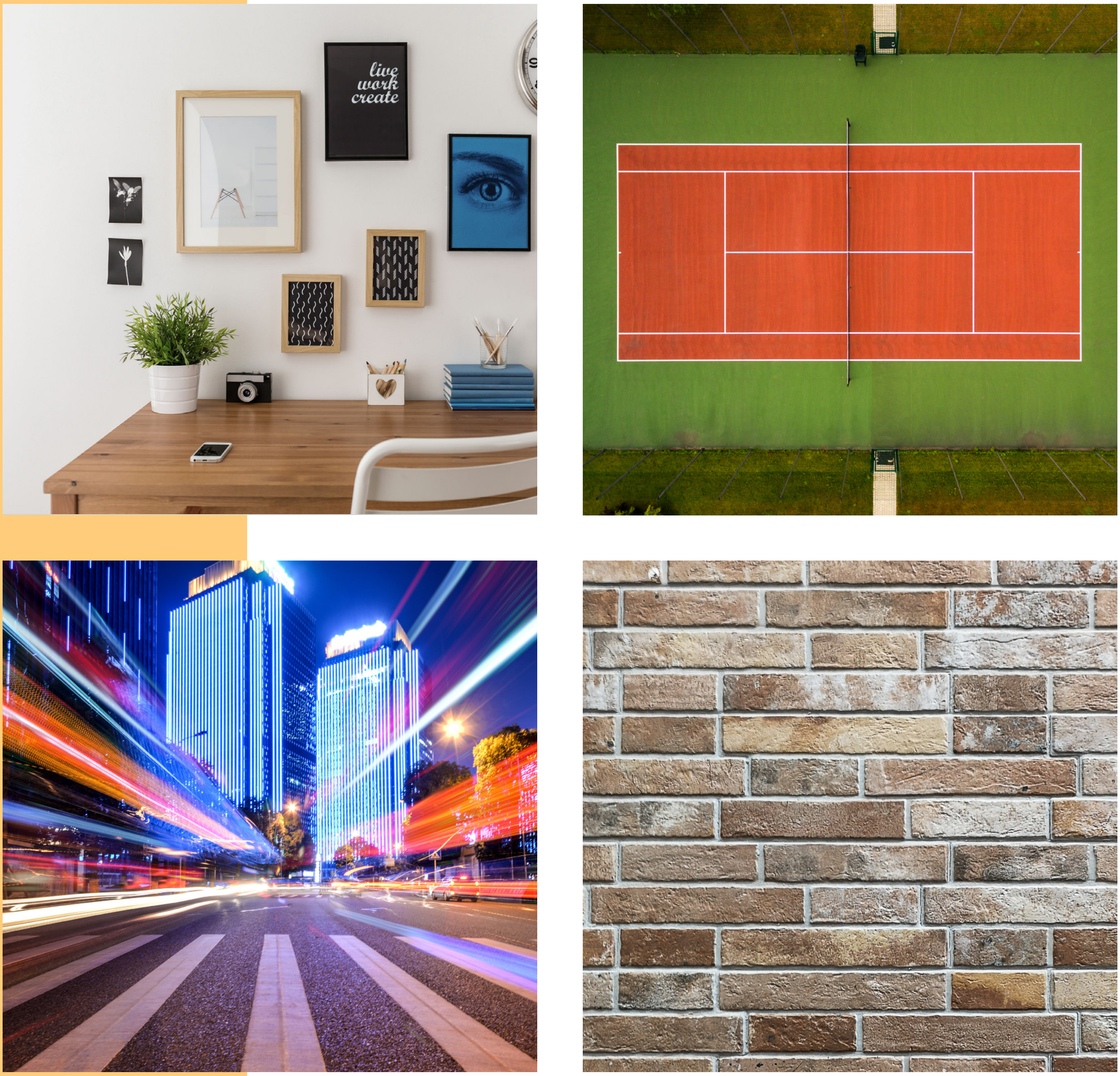
CONCEITOS E ELEMENTOS

Após termos conversado bastante sobre os triângulos e suas características, agora é a vez dos quadriláteros, mas o que são quadriláteros?

Passeando pelas ruas, e observando as fachadas dos edifícios, as quadras de tênis, futebol, vôlei, a forma da estrutura de telhados, e mesmo em nossas casas, a forma das paredes, da maioria dos tampos das mesas e assentos de cadeiras, o que você pode perceber de comum em tudo isso?

Não será tão difícil perceber que todos tem em comum a sua forma, que possui 4 lados, a maior parte das estruturas que conhecemos são assim, e elas são chamadas de quadriláteros. Observe as figuras:

Figura 70 - Quadriláteros no dia-a-dia.



Mas o que são esses tais quadriláteros?

Lembra do plano do primeiro capítulo? Então, pegando aquela folha de papel e marcando 4 pontos distintos (diferentes) com três deles não colineares A, B, C e D, ligando esses pontos, teremos 4 segmentos de reta, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, esses segmentos formam o quadrilátero no plano, então podemos definir o quadrilátero como a *figura formada por 4 pontos A, B, C e D, pelos vértices formados por eles e pelos segmentos (lados)que os unem*, observe a figura 70.

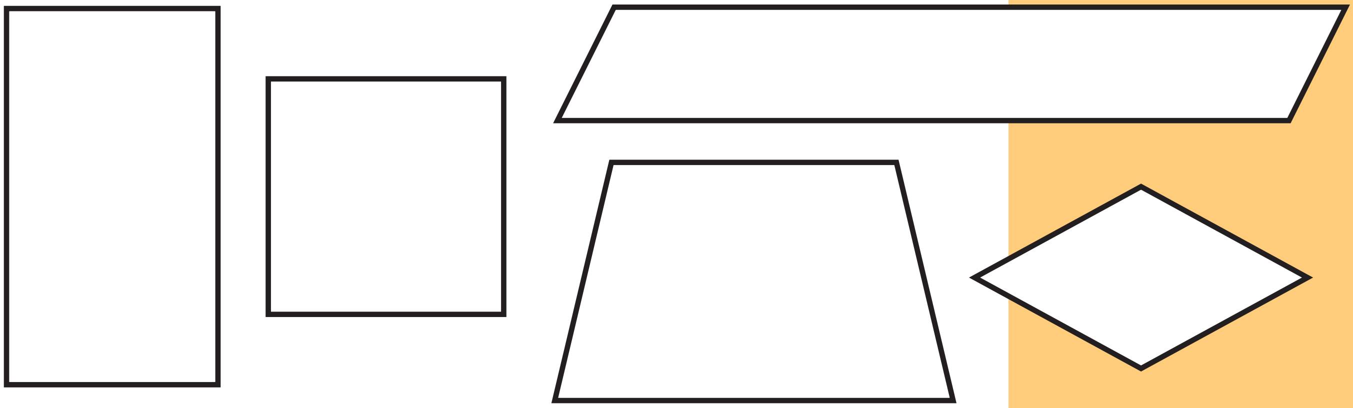


Figura 71 - Vários quadriláteros de formas diferentes.

Perceba que todos os quadriláteros possuem:

• 4 segmentos de reta que são os lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.

• 4 vértices: A, B, C e D.

• 4 ângulos: $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}A$ e $B\hat{A}D$.

• 2 diagonais: AC e BD (as diagonais são os segmentos de reta que ligam dois vértices opostos).

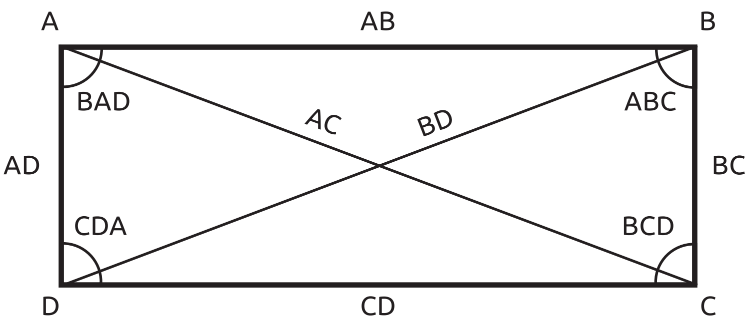


Figura 72 - Identificando cada elemento.

Os quadriláteros possuem lados consecutivos e lados opostos, observando a figura 73, é possível perceber que os *lados consecutivos* são os dois lados que partem de cada um dos vértices, por exemplo a partir do vértice A partem os lados de segmento $\overline{AD}$ e AB, então, esses são lados consecutivos, já os *lados opostos* são os lados que estão um exatamente em frente ao outro, por exemplo os lados de segmento $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são opostos.

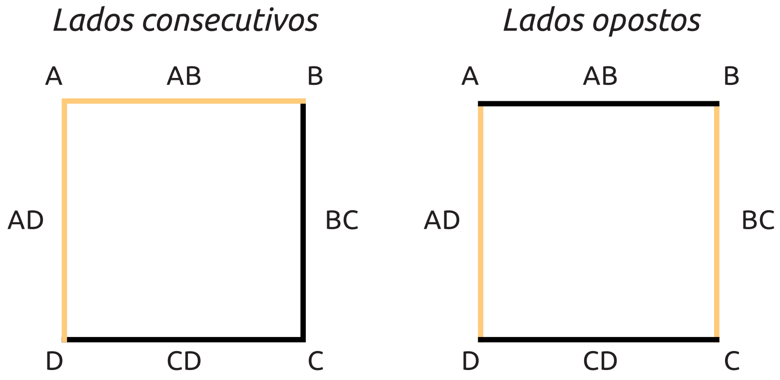


Figura 73 - Quadriláteros demonstrando os lados consecutivos e opostos.

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS – CLASSIFICAÇÃO

Agora que você já conheceu os quadriláteros podemos continuar nossa conversa discutindo algumas características destas figuras, alguns quadriláteros são chamados de *notáveis*, porque eles possuem algumas propriedades (características) bastante particulares, são eles, os trapézios, os paralelogramos, os retângulos, os losangos e os quadrados. Os notáveis podem ser classificados em duas "famílias", a família dos paralelogramo e a família dos trapézios.

Os pertencentes de uma família, são aqueles quadriláteros que possuem características iguais, os pertencentes à família dos *paralelogramos*, são os quadriláteros que possuem quatro lados paralelos dois a dois, ou podemos dizer também que são os quadriláteros que possuem lados opostos paralelos, o que dá na mesma situação.

Os paralelogramos são os retângulos, os quadrados, os losangos e os próprios paralelogramos, por esse motivo podemos dizer que todo quadrado, todo retângulo e todo losango também são paralelogramos, porém pequenas características os diferenciam, vamos ver essas características. Vamos começar pelo próprio *paralelogramo*, além da propriedade já falada anteriormente, que eles possuem quatro lados paralelos dois a dois, ainda podemos dizer que, os lados opostos tem mesma medida (congruentes), as diagonais se cortam exatamente nos seus pontos médios, ou seja, exatamente na metade delas, o paralelogramo possui um par de lados paralelos "inclinados" portanto possui dois ângulos agudos opostos e iguais e dois ângulos obtusos opostos e iguais (ângulos opostos são congruentes).

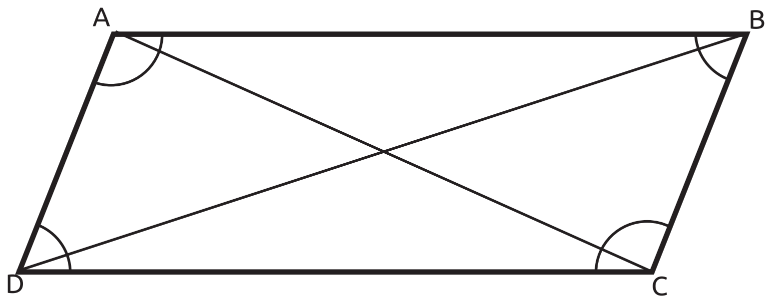


Figura 74 - Paralelogramo.

Observe a figura 75. O segundo membro da família dos paralelogramos é o *retângulo*, além das características dos paralelogramos, vale também dizer que eles possuem os 4 ângulos retos e suas diagonais têm a mesma medida (são congruentes).

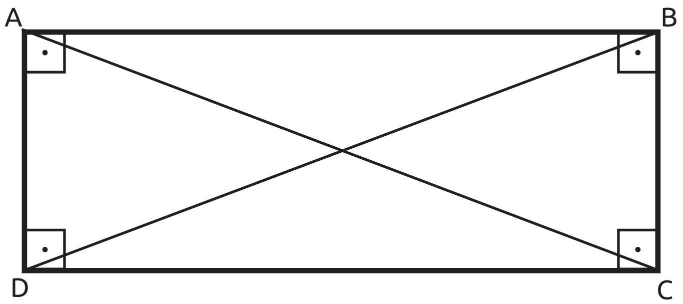


Figura 75 - Retângulo.

O *losango* é todo paralelogramo que possui os lados adjacentes iguais (congruentes), e além das propriedades dos paralelogramos, temos também que em todo losango as suas diagonais são perpendiculares (formam ângulos de 90º) e estão nas bissetrizes de seus ângulos internos, lembrando que as bissetrizes são as retas que dividem um ângulo em duas partes iguais. No losango, teremos dois ângulos opostos agudos e os outros dois obtusos. Observe a figura 76.

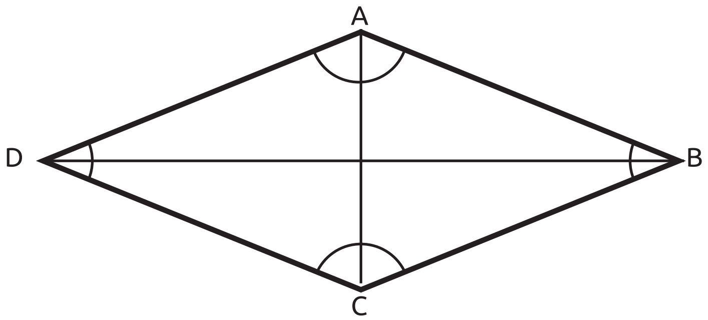


Figura 76 - Losango.

E por último veremos o *quadrado*, o quadrado é quadrilátero mais interessante, pois ele é retângulo e losango ao mesmo tempo. No quadrado valem todas as propriedades do retângulo e todas as propriedades do losango.

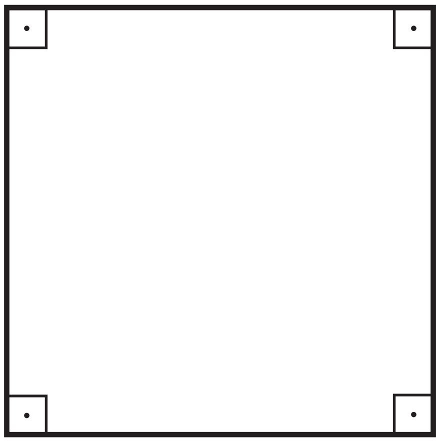


Figura 77 - Quadrado.

Normalmente dizemos que o quadrado é o retângulo que possui todos os lados iguais, então vale lembrar que *todo quadrado é retângulo, mas nem todo retângulo é quadrado, pois para ser quadrado os 4 lados tem que ter a mesma medida.*

Vale também dizer que *todo quadrado é losango, mas nem todo losango é quadrado, pois para ser quadrado é necessário que os 4 ângulos internos sejam iguais a 90º.*

No esquema abaixo você terá um resumo deste conceito:

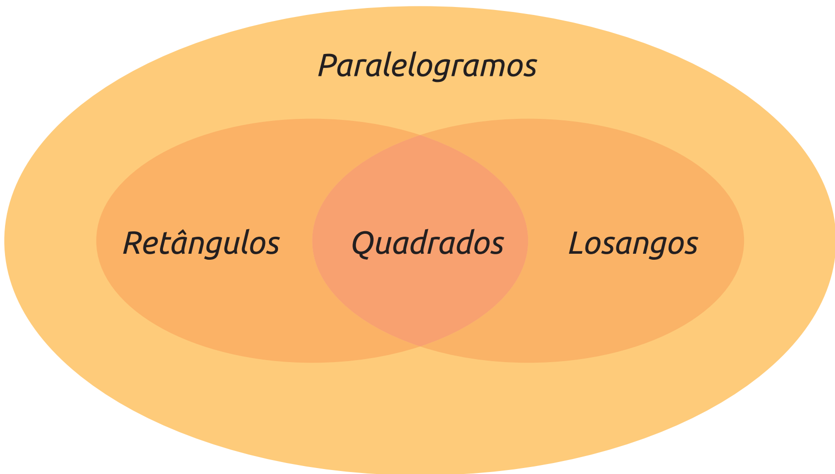


Figura 78 - Esquema dos quadriláteros.

Agora vamos estudar a "família" dos *trapézios*, esse quadrilátero tem características bem particulares, eles possuem dois lados paralelos, e dois lados chamados transversais ou transversos (são lados inclinados), observe a Figura 78, temos o trapézio ABCD, com os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$; pela figura você percebe que os lados de segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, ou seja, todos os seus pontos tem a mesma distância entre si, esses dois lados são chamados de bases do trapézio, o segmento $\overline{AB}$, é a base menor e o segmento CD é a base maior do trapézio. Os lados de segmentos AD e BC são os lados transversos (inclinados). Em um trapézio os ângulos internos formados por um lado transverso quando cruza com os lados paralelos, são suplementares, ou seja, somam 180º.

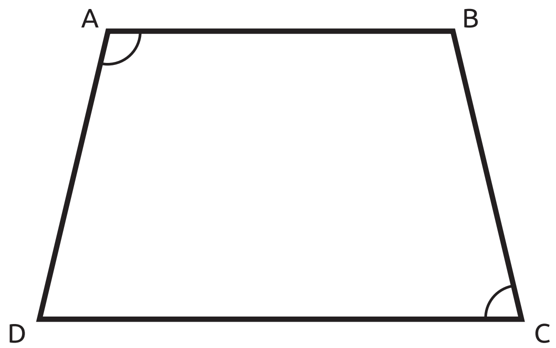


Figura 79 - Trapézio.

Os trapézios podem ser *isósceles*, *retângulos ou escalenos*.

Os *isósceles* são trapézios que possuem os lados transversos iguais e os ângulos formados entre os lados transversos e uma das bases também são iguais (congruentes).

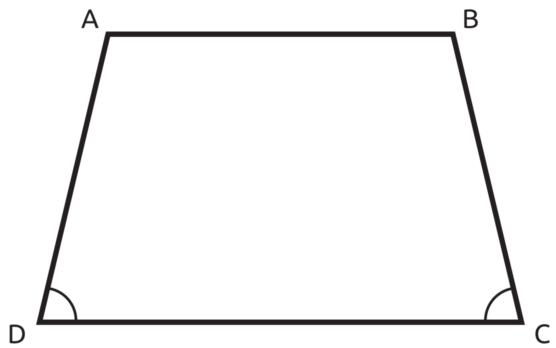


Figura 80 - Trapézio isósceles.

Já os *trapézios retângulos* são aqueles que possuem dois ângulos retos, ou seja um dos lados transversos é perpendicular às bases.

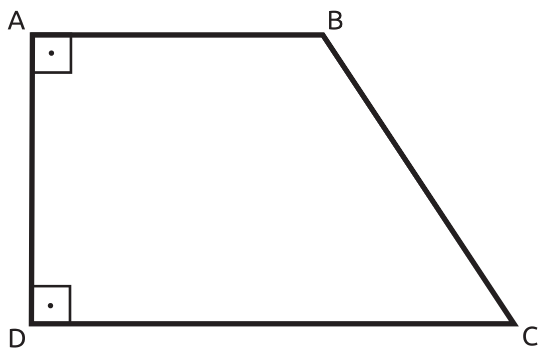


Figura 81 - Trapézio retângulo.

E por fim temos o *trapézio escaleno*, que é o trapézio que possui todos os lados desiguais, ou seja, os lados não paralelos possuem medidas diferentes.

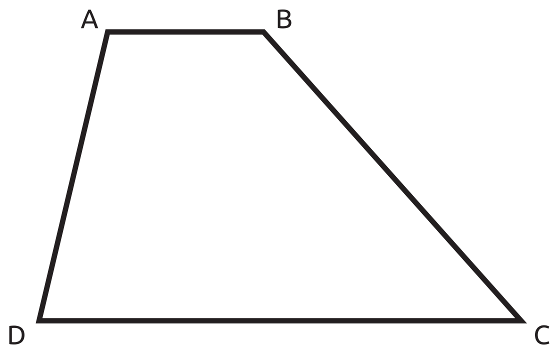


Figura 82 - Trapézio escaleno.

Os trapézios possuem algumas linhas notáveis comuns a todos eles, *as diagonais* do trapézio são os segmentos de reta que ligam dois vértices opostos, ele possui duas diagonais. A *altura* do trapézio é o segmento de reta perpendicular às bases e que fica entre elas.

BASE MÉDIA DO TRAPÉZIO

Uma das características mais importantes do trapézio é a *Base Média*, essa base média é o segmento que une os pontos médios dos lados transversos do trapézio e é paralelo às suas bases. Dizemos que a base média dos trapézios é igual a semi-soma de suas bases.

A semi-soma é a soma das medidas da base menor e da base maior dividida por 2. Fazendo esse cálculo é possível encontrar a medida do segmento que liga os pontos médios. Para o cálculo fazemos o seguinte: Em um trapézio ABCD, onde AB e CD são as bases.

$$Bm = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD})}{2}$$

O segmento $\overline{MN}$ é a base média

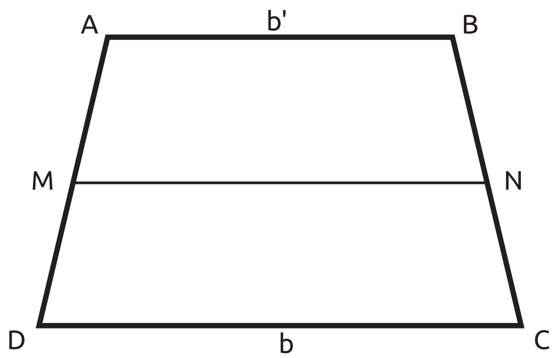


Figura 83 - Trapézio com a base média.

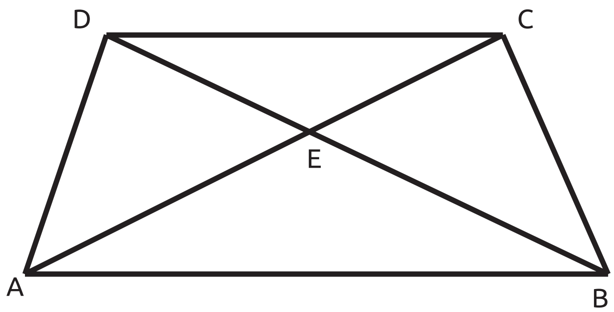


Figura 84 - Diagonais do Trapézio

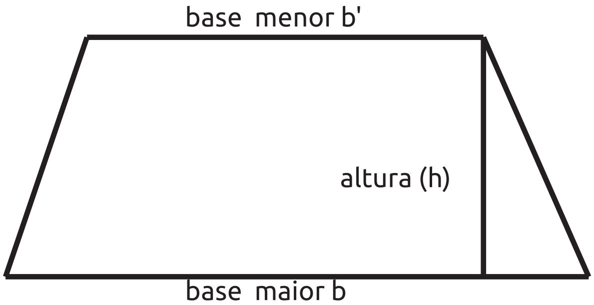


Figura 85 - altura do Trapézio

Uma aplicação bem interessante da base média é o cálculo das medidas dos degraus de uma escada.

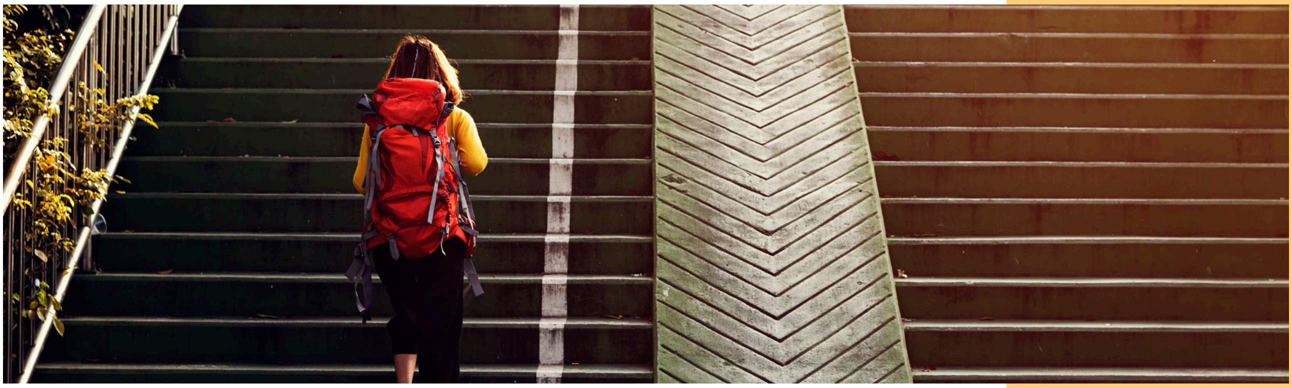


Figura 86 - Escada.

Além dos paralelogramos e dos trapézios ainda existe uma terceira "Família" de quadriláteros, que são aqueles que não possuem paralelismos entre seus lados.

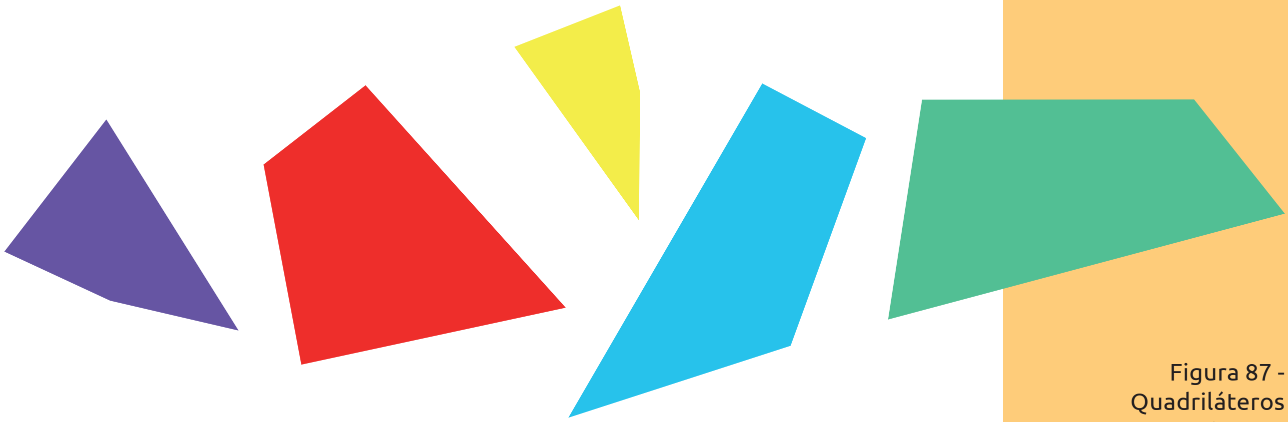


Figura 87 - Quadriláteros quaisquer.

Com isso vimos que os quadriláteros são bastante importantes na nossa vida cotidiana, muitos dos objetos que utilizamos, e na grande maioria das construções as formas mais utilizadas são eles, os quadriláteros.

08

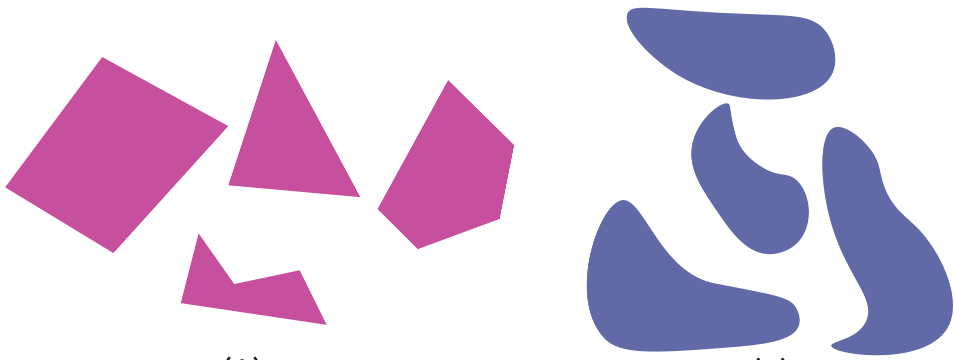
POLÍGONOS

"AS FORMAS MAIS FANTÁSTICAS
SÃO AQUELAS FLEXÍVEIS,
QUE NOS FAZEM IMAGINAR E ACREDITAR
QUE NÃO HÁ COISAS NENHUMAS QUE SEJAM
IMPOSSÍVEIS."

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Após termos conversado bastante sobre os triângulos e quadriláteros, vamos ver agora o que são os polígonos. Só por curiosidade, a palavra polígono vem da junção de duas palavras gregas e significa poli = muitos e gonos = ângulos, então polígonos significa muitos ângulos. Vamos lá então?

Por definição quando, em um plano, temos uma sequência de três ou mais pontos, consecutivos e não colineares, a reunião dos segmentos de reta consecutivos formados por esses pontos é um polígono. De forma mais prática podemos dizer que um polígono é uma figura fechada formada apenas por segmentos de reta.



(A) (B)

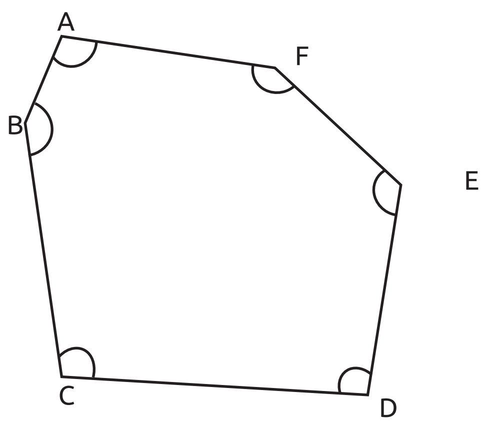
Figura 88 - (A) Polígonos e (B) figuras que não são polígonos.

Não existem polígonos de um ou dois lados, o menor polígono tem 3 lados, que é o nosso conhecido triângulo.

Os polígonos são caracterizados pelos seguintes elementos: *ângulos, vértices, diagonais e lados*. O número de vértices de um polígono é igual ao número de lados e ângulos deste polígono.

Se pegarmos um polígono qualquer ABCDEF (figura), os pontos A, B, C, D E e F são os *vértices* do polígono, os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{AF}$ são os *lados* do polígono, o encontro dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$, $\overline{EF}$ e $\overline{AF}$, $\overline{AF}$ e $\overline{AB}$ são os *ângulos* do polígono, os ângulos são representados por $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$, $D\hat{E}F$, $E\hat{F}A$ e $F\hat{A}B$.

Figura 89 - Polígono com todos os elementos.



A *diagonal* do polígono é o segmento de reta que tem como extremidades dois vértices não consecutivos do polígono, na figura o polígono ABCD, tem como diagonais os segmentos AC e BD.

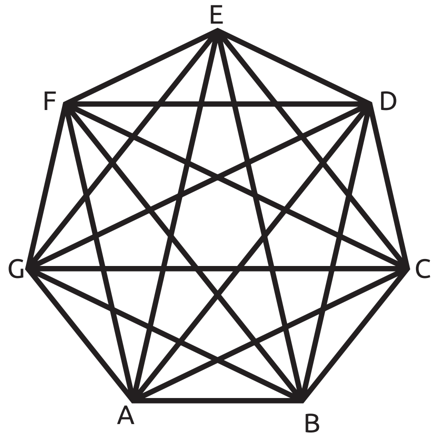


Figura 90 - Polígonos com as diagonais.

Existe uma forma bem simples de calcular o número de diagonais de um polígono, basta multiplicar o número de lados do polígono pelo número de lados menos 3, e o resultado dividir por 2, matematicamente fica assim:

$$d = \frac{n.\ (n-3)}{2}$$

Onde *d* é o número de diagonais e *n* é o número de lados do polígono. Vale lembrar que o triângulo é o único polígono que não possui diagonais.

Em relação à sua forma, os polígonos podem ser convexos e não-convexos (côncavos), para facilitar o entendimento, observe que abaixo estão duas figuras representando dois polígonos de 5 lados, o polígono ABCDE e o polígono FGHIJ.

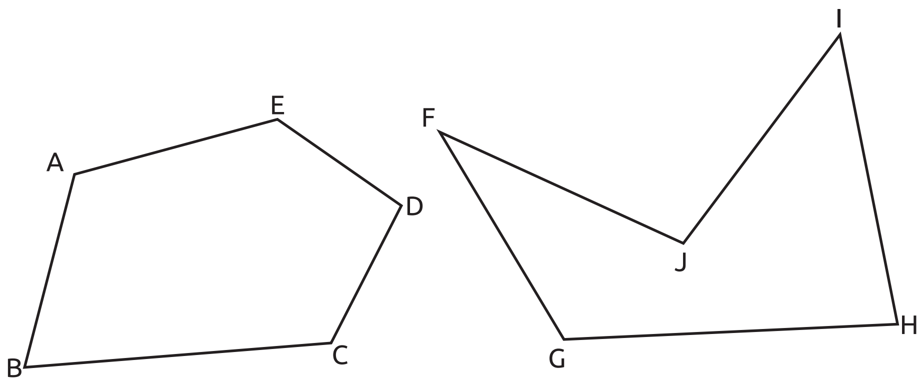


Figura 91 -Polígonos de 5 lados

Existe uma forma bem prática de identificar qual é o polígono convexo e qual é o polígono côncavo, basta desenhar uma reta nesse polígono e verificar, se essa reta cruzar no máximo em dois pontos do polígono ele será *convexo*, se essa reta cruzar em mais de dois pontos do polígono ele será *côncavo*. Observe a figura 89.

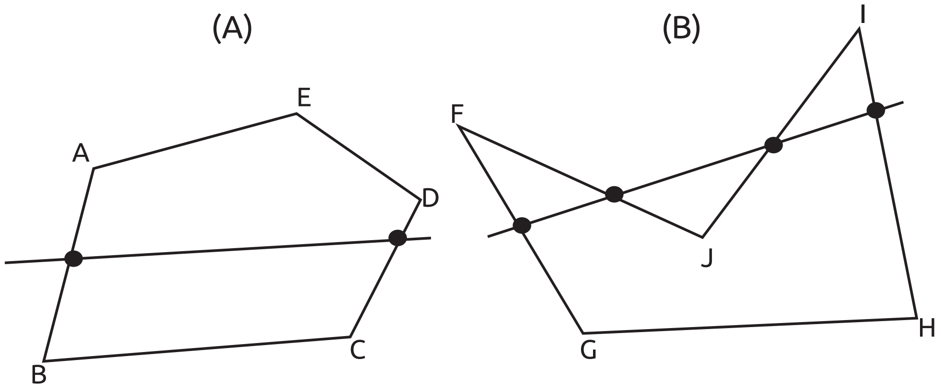


Figura 92 - (A) Polígono convexo e (B) polígono côncavo.

O interior de um polígono é chamado de superfície poligonal.

Apesar de os polígonos serem convexos ou côncavos, o nosso estudo será baseado apenas nos polígonos convexos.

Como tudo que existe possui nome, os polígonos não poderiam ser diferentes, eles recebem nomes de acordo com a quantidade de lados que possuem, não se assuste com os nomes, pois esses nomes são formados pelos prefixos gregos ou latinos dos nomes dos números seguidos por gonos, por exemplo 5 é penta, o polígono de 5 lados é o pentágono. Na tabela abaixo estão os nomes dos polígonos mais conhecidos. Lembre-se que é importante lembrar dos nomes dos polígonos, mas não é necessário decorá-los, conforme o uso você vai guardando os nomes naturalmente, mas se esquecer, recorra a tabela.

Figura 93 - Tabela de polígonos.

Existem polígonos com centenas de lados, é muito interessante perceber que quantos mais lados, mais parecidos com uma circunferência os polígonos serão.

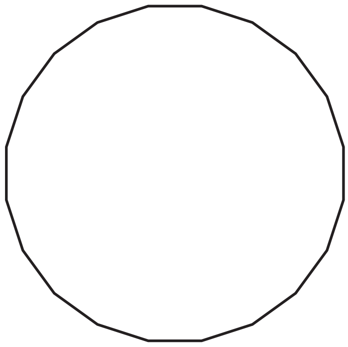


Figura 94 - Polígono com mais de 20 lados iguais.

POLÍGONOS REGULARES

Já vimos que os polígonos podem ser convexos e côncavos, conhecemos elementos e seus nomes, agora vamos discutir o que são os polígonos regulares e os irregulares, este caso também é bastante fácil, porque para ser regular o polígono tem que ter todos os seus lados congruentes, ou seja, todos os lados devem ter a mesma medida, eles têm que ser iguais, qualquer outro polígono que não tenha os lados iguais, são irregulares.

O polígono regular pode ser chamado de *equilátero*, por exemplo o triângulo com os lados iguais são triângulos equiláteros, o quadrado possui todos os lados iguais, então ele é um quadrilátero equilátero.

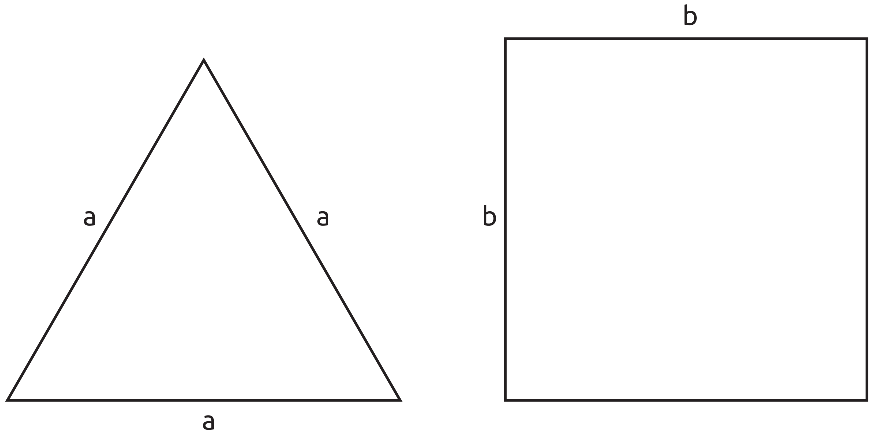


Figura 95 - Triângulo e um quadrado mostrando seus lados iguais.

O polígono que possui todos os ângulos iguais são chamados de equiângulo, o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular, são exemplos de polígonos equiângulos.

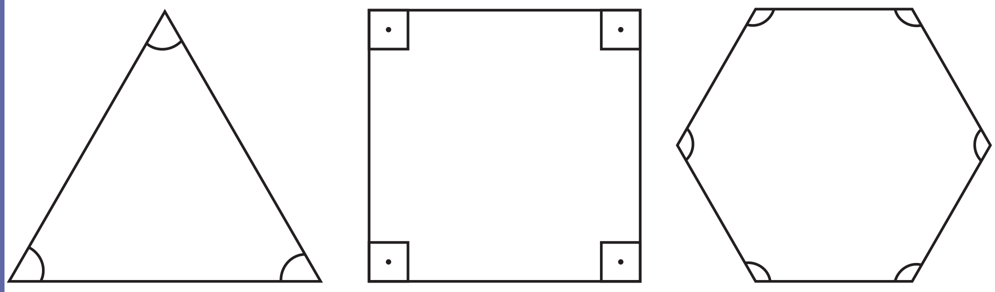


Figura 96 - Triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular, com a representação de seus ângulos.

ÂNGULOS INTERNOS E ÂNGULOS EXTERNOS (POLÍGONO CONVEXO)

Todo polígono possui ângulos, como já estudado anteriormente, esses ângulos podem ser internos (dentro) ao polígono e também podem ser externos (fora) do polígono.

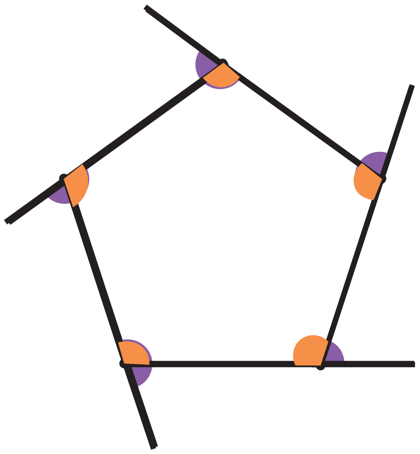


Figura 97 - Polígono com as representações dos ângulos internos e externos.

Agora vamos conversar e compreender como se faz para encontrar a soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer, é importante saber que quantos mais lados têm o polígono, maior será a soma dos ângulos internos e essa soma vai depender das diagonais que partem de um mesmo vértice do polígono.

Vamos iniciar essa conversa com o cálculo da soma dos ângulos internos de um triângulo, mas como o triângulo não tem diagonal, vamos imaginar um quadrilátero, lembrando que usaremos apenas as diagonais que partem de um mesmo vértice do polígono. Observe o retângulo ABCD a seguir:

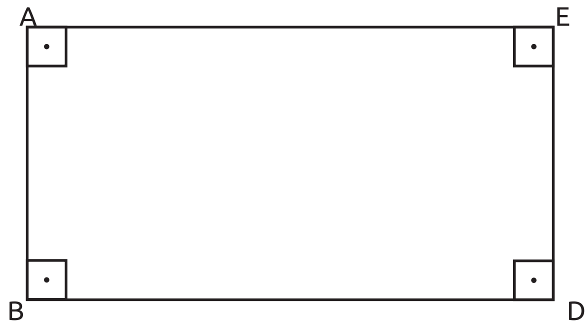


Figura 98 - Retângulo ABCD.

Traçando a diagonal que parte do vértice A, encontramos o segmento de reta AC, que é a diagonal, perceba que essa diagonal divide o retângulo em dois triângulos iguais, como o retângulo possui 4 ângulos retos (90º), a soma dos ângulos internos dele é de 4x90º = 360º, como ele foi dividido em dois triângulos, chegamos à conclusão de que cada triângulo tem a soma dos ângulos internos igual a metade da soma dos quadriláteros, ou seja 360º/2 = 180º.

Com isso temos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180º e a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é igual a 360º.

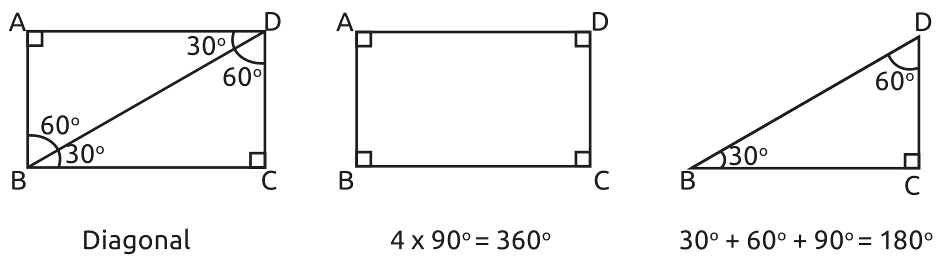
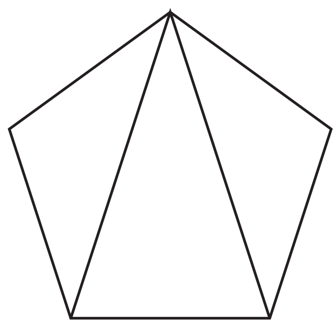


Figura 99 - Representação do triângulo e de um quadrilátero com a soma de seus ângulos internos.

Continuando com esse pensamento se traçarmos as diagonais de um pentágono regular que se origina de um mesmo vértice veremos que o pentágono será divido em 3 triângulos, como cada triângulo tem a soma dos ângulos internos igual a 180º, e no pentágono temos 3 triângulos, teremos 3x180 = 540º.

Figura 100 - Representação do pentágono dividido em três triângulos .



No hexágono regular se fizermos o mesmo processo, encontraremos 4 triângulos, então 4x180° = 720°, e assim sucessivamente.

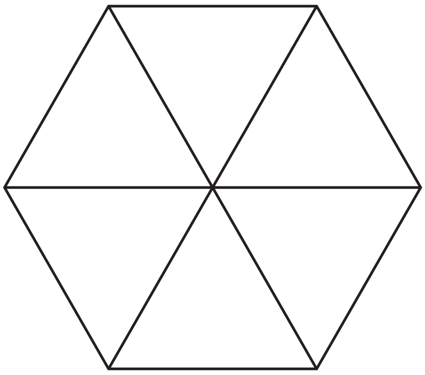


Figura 101 - Hexágono dividido em 6 triângulos.

Agora, observe atentamente o processo ocorrido nas figuras estudadas:

Triângulo, 3 lados – 1 triângulo, 1x180° = 180°

Quadrilátero, 4 lados – 2 triângulos, 2x180° = 360°

Pentágono, 5 lados – 3 triângulos, 3 x 180° = 540°

Hexágono, 6 lados – 4 triângulos, 4 x 180° = 720°

Você consegue perceber que a quantidade de triângulos formados pelas diagonais é sempre igual ao número de lados do polígono menos 2. E para calcular a soma dos ângulos internos do polígono basta multiplicar essa diferença por 180°. Com isso podemos escrever um modelo matemático para calcular a soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo regular, que é:

$$S(ai)=(n-2).180^\circ$$

Onde *S(ai)* é a soma dos ângulos internos do polígono e *(ai)* é o número de lados do polígono.

Se caso você tem a soma dos ângulos internos do polígono e precisa encontrar o valor de cada ângulo, basta dividir a soma dos ângulos internos pelo número de lados do polígono.

$$ai = \frac{S(ai)}{n}$$

E possível, também, utilizar a fórmula da soma dos ângulos internos do polígono para calcular o número de lados dele, para isso é necessário que se tenha a soma dos ângulos internos.

E como se calcula a soma dos ângulos externos de um polígono convexo regular?

A primeira coisa que tem que se saber é que a soma dos ângulos externos, não é a soma de tudo que está fora do polígono, para essa soma é necessário que se faça um prolongamento de cada lado do polígono, só assim conseguimos visualizar os ângulos externos.

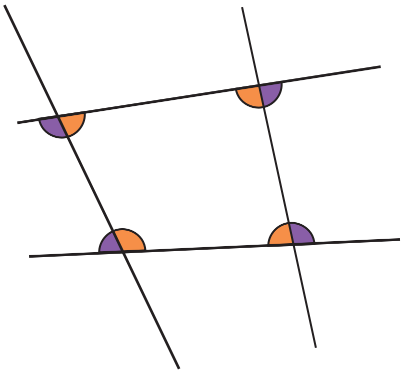


Figura 102 - Polígono com os lados prolongados evidenciando os ângulos internos e os ângulos externos.

Observando a figura você verá que para cada ângulo interno existe um externo, e que os dois juntos formam um ângulo raso (180º), ou seja eles são suplementares, por isso para qualquer que seja o polígono, independentemente do número de lados.

A soma de seus ângulos externos será sempre igual a 360º.

Observe o hexágono abaixo, como ele é regular cada ângulo interno mede 120º, o seu suplementar é igual a 60º, este é o ângulo externo, como o hexágono tem 6 lados e 6 ângulos iguais, multiplicamos os 60º por 6, o que nos dá 360º.

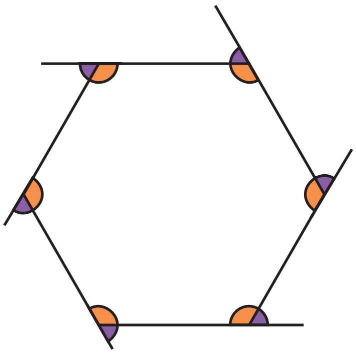


Figura 103 Hexágono e seus ângulos internos e externos

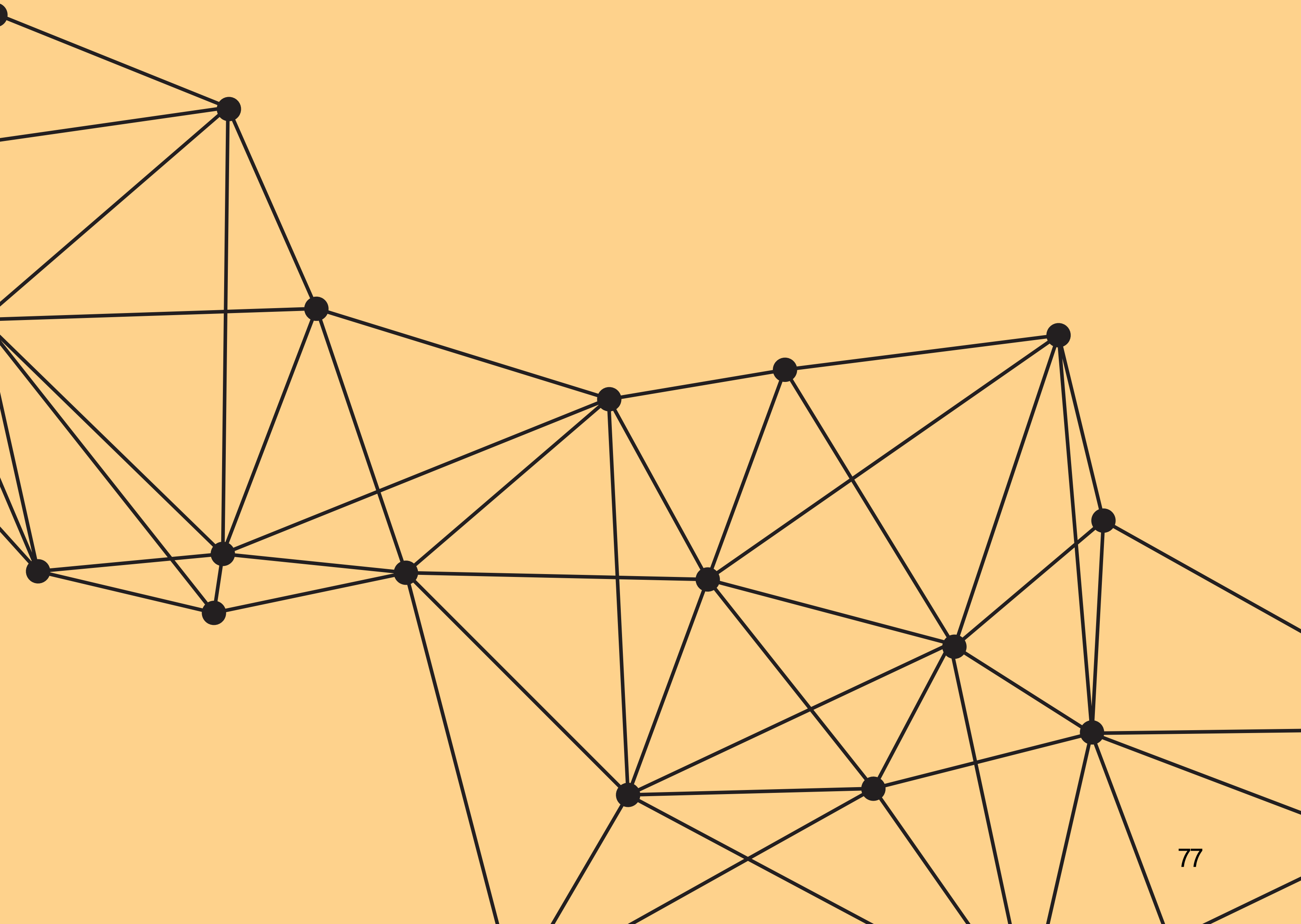
São muitos os conceitos, mas não se preocupe, com o estudo e a prática, rapidinho tudo estará fixado.

09

ÁREAS DE POLÍGONOS E RAZÃO ENTRE ÁREAS

“

QUAL A RAZÃO DO CÉU E A TERRA?
QUAL A RAZÃO PARA SABERMOS COMO VIVEMOS E MORREMOS?
EM UM MUNDO SEM RAZÕES, EXPLICAÇÕES ONDE SE ENCONTRAM?
TÃO SOMENTE NAS FORMAS MAIS COMPLEXAS É QUE SIMPLES RAZÕES NATURALMENTE APARECEM.”



CAPÍTULO 9
Áreas de polígonos e razão entre áreas

Um dos assuntos mais importantes da Geometria plana, é o estudo das áreas dos polígonos. Em praticamente todo o ramo da construção civil, da Engenharia, da produção de papel, de pisos e revestimentos, tintas, e muitas outras coisas, o estudo da área é utilizado. Por exemplo, na construção civil, precisamos dos cálculos das áreas para saber a quantidade de tijolos que devem ser comprados para a construção de uma parede, para isso o engenheiro precisa saber quantos tijolos cabem em um metro quadrado (um quadrado de 1 metro de lado), e a quantidade de metros quadrados da parede, com esses dados ele multiplica o número de tijolos por metro quadrado pela quantidade de metros quadrados da parede para saber quantos tijolos serão necessários, esse cálculo vai acontecer em muitas outras situações, outros exemplos práticos do cálculo da área é como saber qual a quantidade de tinta necessária para pintar uma parede, a quantidade de telhas para cobrir o telhado, a quantidade de pisos necessários para cobrir a superfície de uma sala entre outras centenas de situações.

Quando se fala em cálculos das áreas dos polígonos, logo se lembra das tantas fórmulas necessárias e isso assusta muita gente, mas como já foi dito em capítulos anteriores, o uso de fórmulas nem sempre são necessários, desde que você entenda como um cálculo é feito.

Vamos ver isso!

Em toda figura plana poligonal, vamos ter em comum o comprimento e a largura, pois essas figuras são bidimensionais, que tem apenas duas dimensões, com a multiplicação dessas duas medidas, teremos a área do polígono, basicamente o estudo das áreas depende desse conceito, a área de um polígono é dada pelo comprimento multiplicado pela largura do polígono, com pequenas variações, porque em alguns casos, teremos que fazer uma divisão por 2, mas isso veremos mais adiante.

Figura 104 - Retângulo com a marcação do comprimento e da largura.

PERÍMETRO DE UM POLÍGONO

Antes de iniciar nossa conversa sobre áreas, é preciso lembrar-se de outro conceito, o *perímetro*, que às vezes causa confusão. O *perímetro* de uma figura é a medida de seu contorno, no estudo dos polígonos podemos dizer que o perímetro é soma das medidas de todos os lados da figura. Vamos ver um exemplo bastante fácil de entender, imagine que você precise comprar madeira para fazer os rodapés da sua sala, você precisará medir o comprimento de cada parede da sala e depois somar todas essas medidas para encontrar o total de madeira que vai comprar, nesse caso você calculou o perímetro da sala, o contorno dela, o perímetro é linear, tem apenas uma medida, o comprimento, observe o pentágono abaixo.

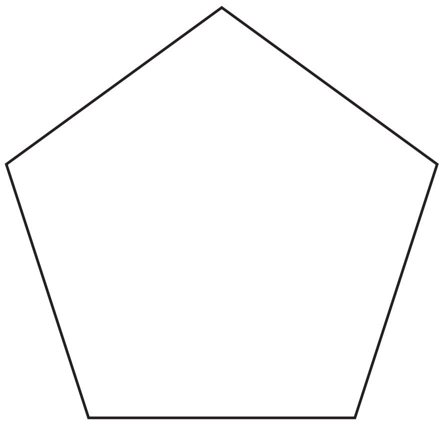


Figura 105 - Pentágono regular.

Como o pentágono regular tem todos os lados iguais, para calcular seu perímetro basta multiplicar 5 pela medida do lado, imagine que a medida de cada lado seja 6 cm, temos:

P = 5.6, então o perímetro será 30cm.

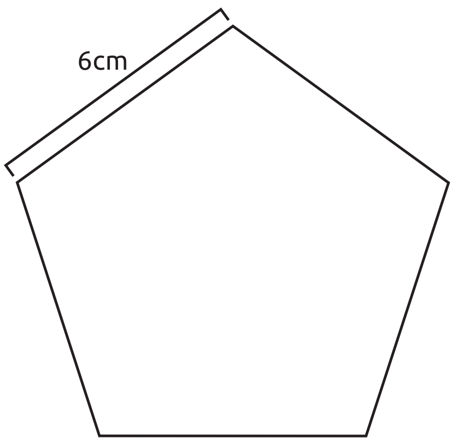


Figura 106 - Pentágono de 6cm de lado.

O mesmo ocorre com polígonos irregulares, basta somar as medidas de cada um dos lados. Observe a figura abaixo.

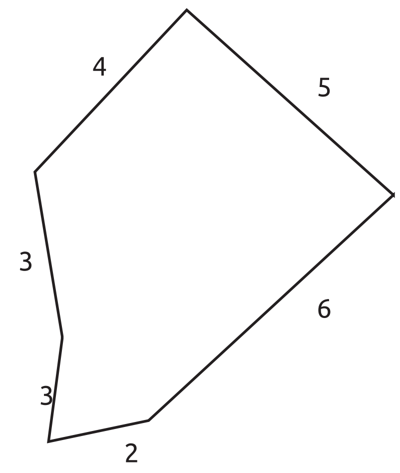


Figura 107 - Polígono com lados de medidas 3, 4, 5, 3, 6 e 2cm.

Para calcular seu perímetro basta encontrar a soma das medidas dos lados:

P = 3 + 4 + 5 + 3 + 6 + 2

P = 23cm

Bom, sabendo o que é o perímetro, podemos voltar ao estudo das áreas.

ÁREAS DOS POLÍGONOS

A *área* é a superfície poligonal, ou seja, a parte interna do polígono, o que está limitado pelas linhas poligonais.

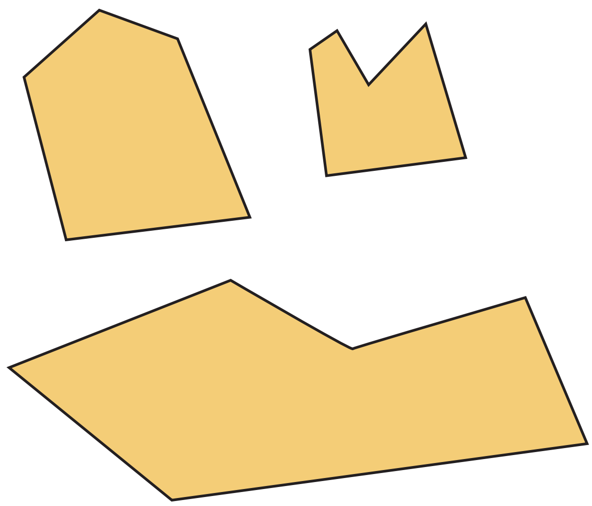


Figura 108 - Alguns polígonos com sua parte interna pintada, mostrando a superfície poligonal.

Vamos ver agora como se faz para calcular a área dos polígonos.

Vamos imaginar que em uma superfície poligonal existam vários quadradinhos, o nosso cálculo tem como objetivo encontrar a quantidade de quadradinhos que existem nessa superfície. Observe o retângulo na Figura 108.

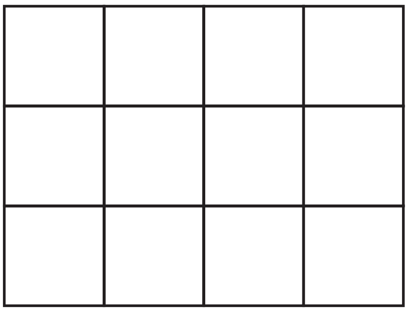


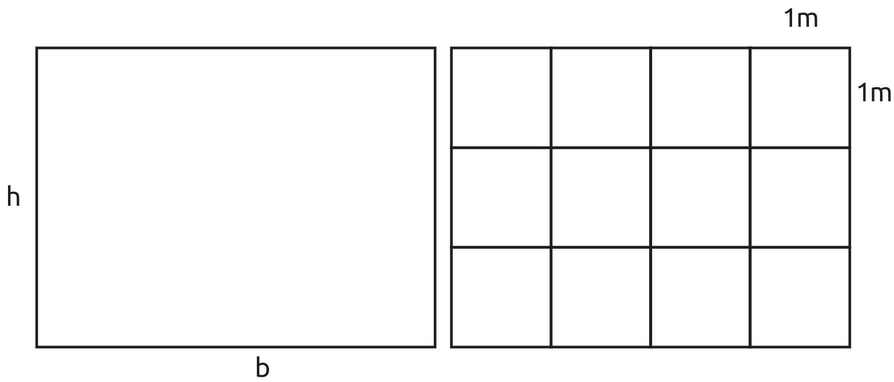
Figura 109 - Retângulo quadriculado.

A primeira coisa que podemos fazer é contar a quantidade de quadradinhos que estão dentro do retângulo, com essa contagem encontraremos a área, mas na grande maioria das vezes esses quadradinhos não serão apresentados, então, contar não resolve o problema, mas existe uma forma muito prática de fazer esse cálculo, no retângulo quadriculado abaixo (figura 107), temos que no seu comprimento existem 6 quadradinhos e na sua largura, existem 3 quadradinhos, na figura é possível perceber que existem 3 fileiras de 6 quadradinhos, contando cada uma teremos 6 + 6 + 6, o que nos dá 18 quadradinhos, esta é a área desse retângulo. Lembrando que para o cálculo da área basta multiplicar o comprimento pela largura da figura, podemos dizer que a área do retângulo é igual a 6.3 = 18 quadradinhos.

A unidade de medida da área será a unidade de medida do lado da figura elevada ao quadrado, se a unidade de medida do lado do polígono for o metro (m), a unidade de medida da área será o metro quadrado (m^2).

Vamos chamar o comprimento do polígono de *base(b)* e a largura chamaremos de *altura(h)*.

Figura 110 - Retângulo normal e um retângulo quadriculado.



ÁREA DO RETÂNGULO E DO PARALELOGRAMO

Vimos no capítulo dos quadriláteros que todo quadrado e retângulo também são paralelogramos, e por isso a forma como se calcula a área de todos eles é mesma, ou seja, multiplicando sua base pela sua altura, observe:

Para se calcular a *área do retângulo e paralelogramo*, multiplicamos a base pela altura $A=b.h$

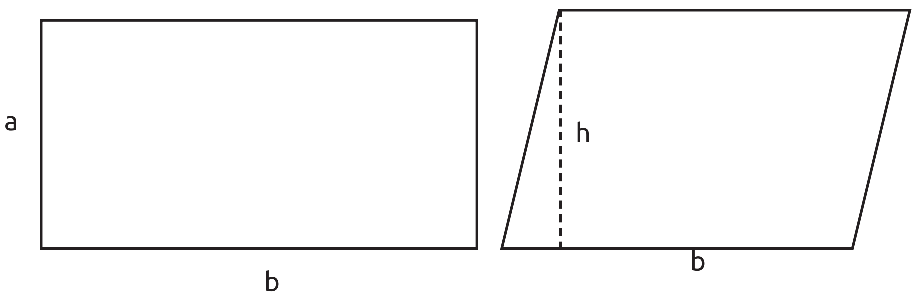


Figura 111 - Retângulo e paralelogramo

$$A=b.h$$

ÁREA DO QUADRADO

Como o quadrado tem os quatro lados iguais, a base e a altura têm a mesma medida, por isso são chamadas de lado (L)".

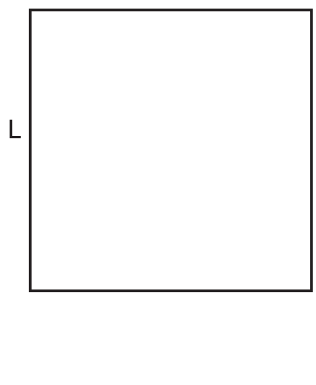


Figura 112 - Quadrado com a indicação do lado l.

$A = b.h$

$A = L.L$

$A = L^2$

ÁREA DO LOSANGO

O losango também é um paralelogramo, mas ele não tem base e nem altura, mas se pegarmos a diagonal maior do losango (D) e multiplicar pela diagonal menor (d), encontraremos a área de um paralelogramo que terá o dobro da área do losango, observe a figura 110.

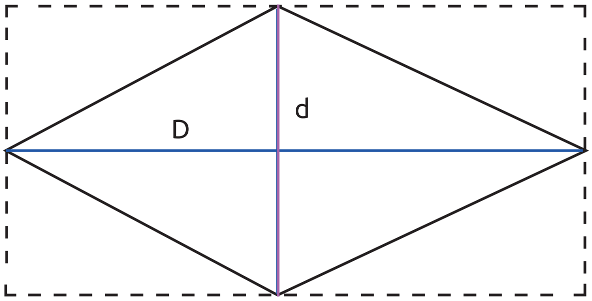


Figura 113 - Losango com diagonal maior (D) e a menor (d).

Na figura é possível observar que as linhas pontilhadas do paralelogramo formam 4 triângulos idênticos aos 4 triângulos que formam o losango, por isso precisamos dividir o resultado da multiplicação das diagonais por 2, para termos a área de apenas um losango.

Resumindo, a área do losango é o produto das diagonais dividido por 2.

$$A = \frac{D.d}{2}$$

ÁREA DO TRIÂNGULO

O cálculo da área do triângulo também é bem interessante, vamos lembrar que quando um quadrilátero é dividido por uma de suas diagonais são formados dois triângulos.

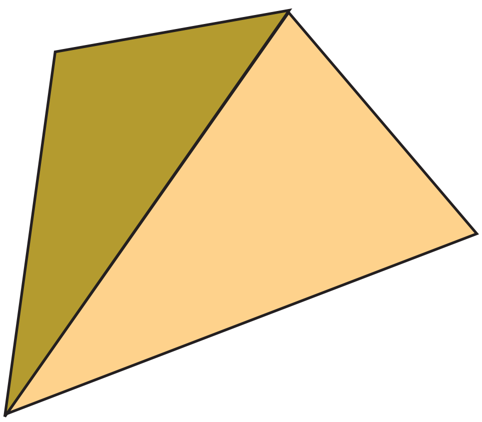


Figura 114 - Quadrilátero divido em dois triângulos por uma diagonal.

Se esse quadrilátero for um paralelogramo, os dois triângulos formados serão iguais, e as suas áreas também serão iguais, por isso, para calcular a área de um triângulo podemos calcular a área do paralelogramo e dividir por 2.

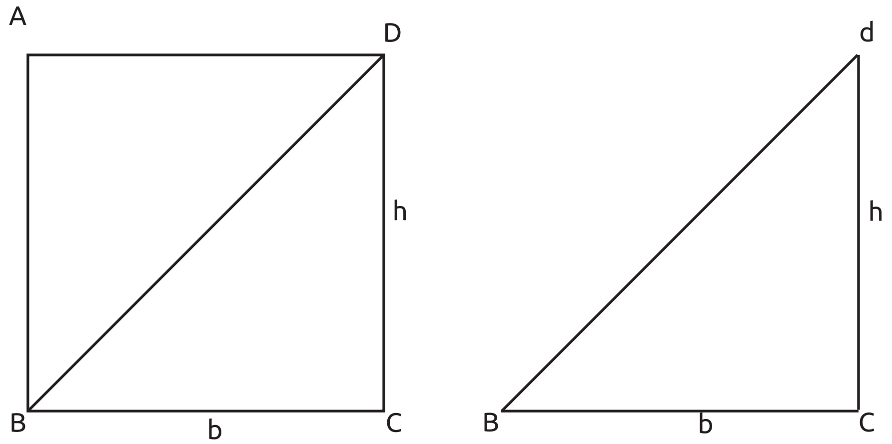


Figura 115 - Demonstração de que a área do triângulo é igual a metade da área do paralelogramo.

Temos então que a área do triângulo pode ser dada por:

$$A = \frac{b.h}{2}$$

ÁREA DO TRAPÉZIO

O trapézio não é paralelogramo, mas a forma de calcular a área não mudará, será a base multiplicada pela altura, mas o trapézio tem pelo menos um lado inclinado, por isso precisamos encontrar uma forma de "transformar" esse trapézio em paralelogramo. Para resolver isso vamos pegar dois trapézios retângulos idênticos.

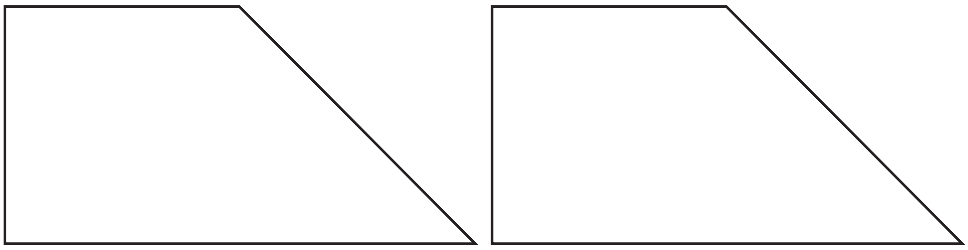


Figura 116 - Dois trapézios retângulos idênticos.

Vamos pegar esses dois trapézios e encaixá-los pelos seus lados inclinados, conforme a figura 117.

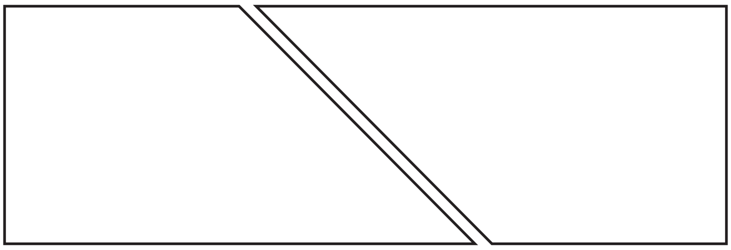


Figura 117 -Trapézios idênticos encaixados

Observe que o trapézio tem duas bases, uma maior e outra menor, quando os dois são encaixados, forma-se um paralelogramo, e o comprimento do paralelogramo é a soma da base maior com a base menor do trapézio, com isso temos que a base será (B+ b).

O cálculo da área é A = b.h, substituindo b por (B + b), fica A = (B + b).h, mas com esse cálculo teremos as áreas dos dois trapézios usados, para termos somente a área de um trapézio dividimos essa área por 2.

Assim:

$$A = \frac{(B + b).h}{2}$$

Com esses conceitos você já terá uma boa base para resolver muitos problemas envolvendo áreas de figuras poligonais, agora é só treinar bastante!

ÁREA DE UM POLÍGONO REGULAR

Polígono regular é todo polígono que possui lados congruentes (iguais) e ângulos internos também congruentes.

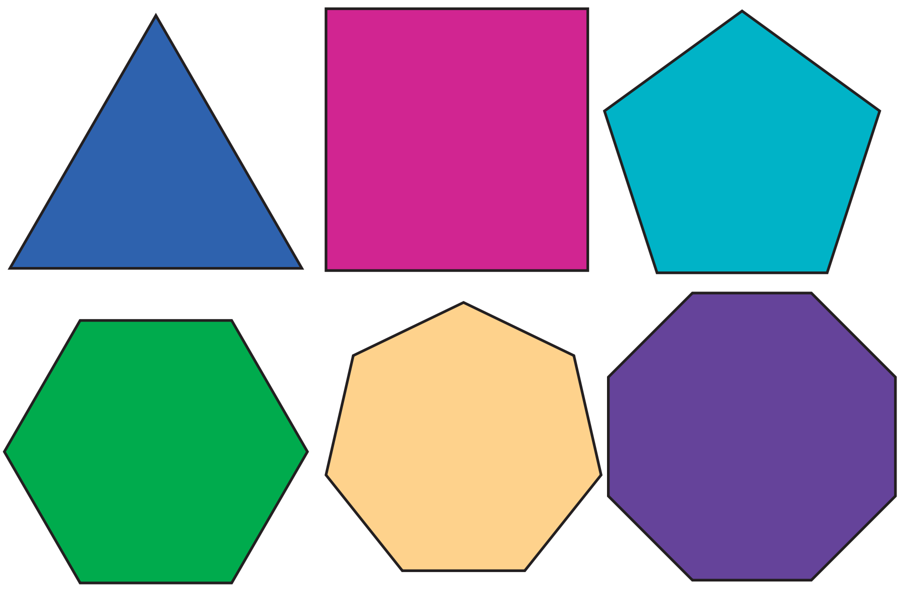


Figura 118 -Polígonos regulares

Quando ligamos o centro do polígono a cada um de seus vértices, encontramos um número de triângulos igual ao número de lados do polígono, todos esses triângulos serão isósceles.

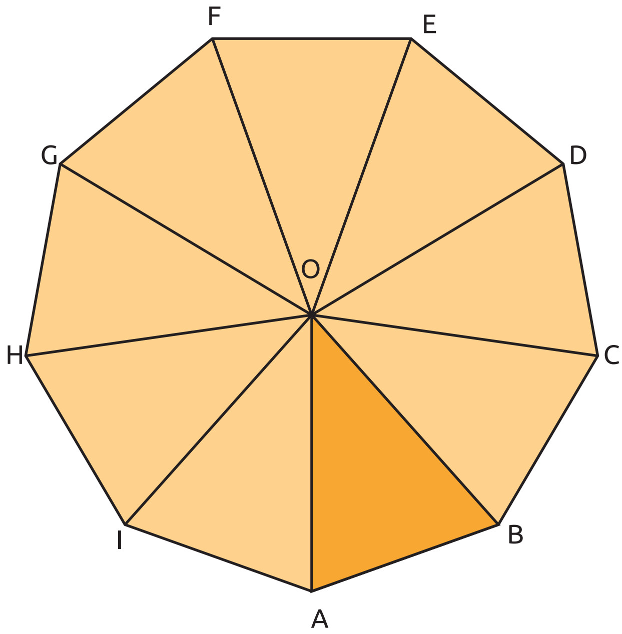


Figura 119 - Polígono de novos lados dividido em nove triângulos isósceles

Vamos observar que todos esses triângulos são iguais, se traçarmos a altura desse triângulo, ligando o vértice, que é o ponto do centro do polígono, ao ponto médio da base do triângulo, verificamos que esse segmento de reta é também é a bissetriz do triângulo, como esse triângulo é parte do polígono esse segmento de reta é conhecido como **apótema do polígono.**

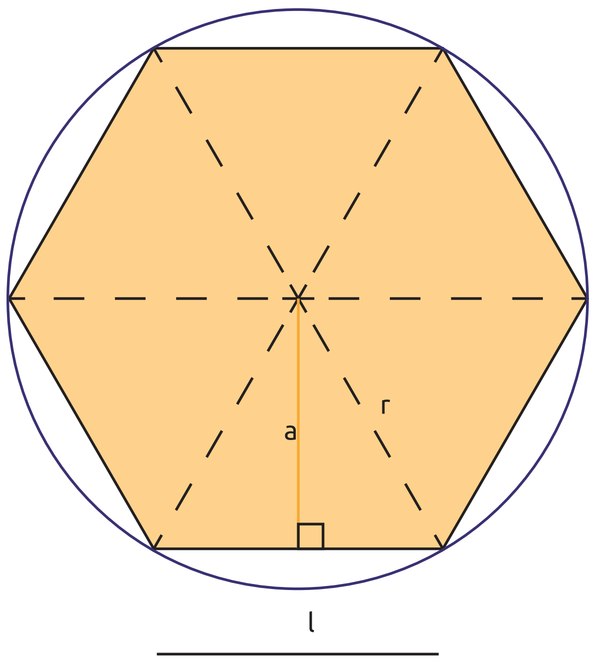


Figura 120 - Apótema a de um polígono regular de 6 lados

Mas por que foi apresentado esse segmento?

Porque ele será necessário para o cálculo da área um de polígono regular qualquer.

Para calcular a área de um polígono regular de n lados, basta multiplicar o semiperimetro desse polígono pelo seu apótema, ou simplesmente multiplicar o perímetro pelo apótema e dividir o resultado por 2.

Semiperímetro é o perímetro do polígono dividido por 2.

$$A = \frac{(P.a)}{2}$$

Onde: A é a área, P é o perímetro e a é a apótema

RAZÃO ENTRE ÁREAS DE FIGURAS SEMELHANTES

Já vimos em capítulos anteriores o que são triângulos semelhantes, agora veremos o que são polígonos semelhantes, não fique preocupado, porque o conceito é o mesmo dos triângulos, polígonos semelhantes são aquelas que possuem ângulos correspondentes iguais (congruentes) e lados correspondentes proporcionais.

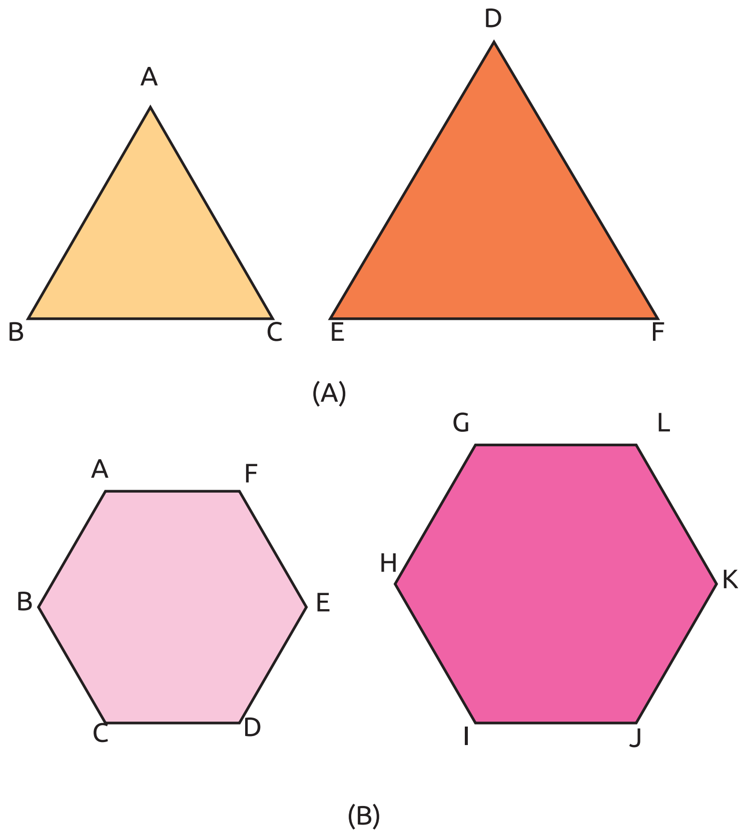


Figura 121 - (A) Par de triângulos semelhantes e (B) par de hexágonos semelhantes

Observando as figuras acima percebemos que existe uma razão de semelhança, essa razão é o resultado da divisão entre as medidas de um lado da primeira figura pelo lado correspondente da segunda figura. Observe os hexágonos regulares da figura 12, o primeiro tem lado medindo 1 cm e o segundo tem lado medindo 2 cm, dividindo o primeiro pelo segundo, teremos 0,5; que é a razão de semelhança entre os dois hexágonos.

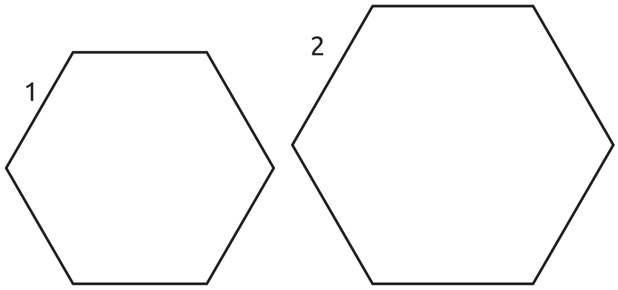


Figura 122 - Hexágonos regulares

Podemos dizer que para calcular a razão de semelhança entre duas figuras semelhantes basta dividir o lado da primeira pelo lado correspondente da segunda, vamos chamar a constante de proporcionalidade de K.

$$k = \frac{l1}{l2}$$

Agora vamos verificar o que acontece com as áreas de duas figuras semelhantes.

Vamos tomar como exemplo dois triângulos retângulos semelhantes, um de base 2cm e altura 4cm, e outro semelhante a ele de base 4cm e altura 8cm.

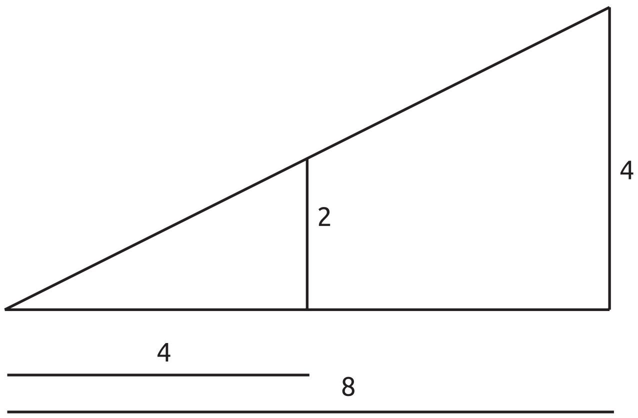


Figura 123 - Semelhança de triângulos.

Vamos calcular a razão de semelhança entre eles:

$$k = \frac{l1}{l2}$$

$$k = \frac{2}{4}$$

$$K = 0,5$$

Agora vamos calcular as áreas de cada um dos triângulos:

$A = \frac{b.h}{2}$ $\quad A = \frac{2.4}{2}$ $\quad A = \frac{8}{2}$ $\quad A = 4\ cm^2$

$A = \frac{b.h}{2}$ $\quad A = \frac{4.8}{2}$ $\quad A = \frac{32}{2}$ $\quad A = 16\ cm^2$

Para calcular a razão entre as áreas utilizaremos o mesmo processo para o cálculo da razão de semelhança das figuras, faremos a divisão entre a área do primeiro triângulo pela área do segundo triângulo, observe:

$$\frac{4}{16} = 0,25$$

Agora vamos analisar a relação entre a razão de semelhança dos lados com a razão de semelhança entre as áreas.

Razão de semelhança entre os triângulos é igual 0,5

Razão de semelhança entre as áreas dos triângulos é igual a 0,25

É possível perceber que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão entre os lados.

Com isso chegamos à conclusão que:

A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2$$

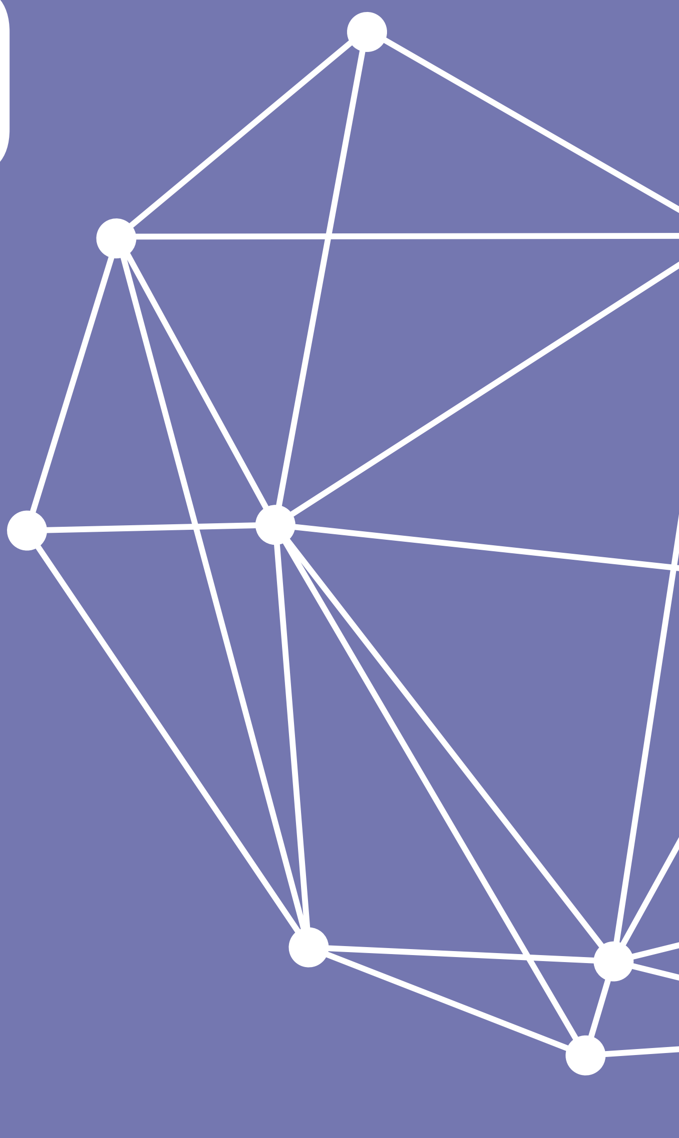
Onde: S_1 e S_2, são as áreas das figuras e K é a razão de semelhança. Essa propriedade é válida para toda e qualquer superfície semelhante, por isso vale:

A razão entre as áreas de duas superfícies semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Com isso chegamos ao fim de mais um capítulo dessa aventura chamada Geometria, mas temos muito mais ainda pela frente!

10

CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO



“

O SÍMBOLO DA PERFEIÇÃO.
O DESIGN DO CRIADOR.
COMO SE NÃO HOUVESSE NADA ALÉM.
PODE MUDAR, MAS NÃO MUDA.
PODE FALAR, MAS NÃO ASSUSTA.
E POR ONDE PASSA PRENDE TODOS NUM LACO DE SIMETRIA E PERFEIÇÃO QUE SOMENTE A MAIS PURA INSPIRAÇÃO PODERIA CRIAR.”

CONCEITOS E ELEMENTOS

"O brinquedo mais gostoso do parque de diversões é a roda gigante. Nossa! Quando ela roda e para bem lá em cima no altão, de lá eu vejo o mundo.... um mundo bem pequenininho".

José dos Reis Santos

Assim como a roda gigante, existem milhares de coisas que têm a mesma forma dela, a Lua, as rodas dos carros e das bicicletas, e também o Sol.

Figura 124 - Circunferências no dia-a-dia.

Mas qual é a figura geométrica plana que nos lembra a roda?

Se você disse a *circunferência*, muito bem! É isso mesmo, a circunferência! Mas o que realmente é uma circunferência?

A circunferência é uma figura geométrica plana, a qual possui todos os seus pontos a uma mesma distância de um ponto dado nesse plano. Observe que a figura 124 tem um ponto central O, este ponto tem uma distância r ao ponto P, e essa mesma distância aos pontos T, C e D.

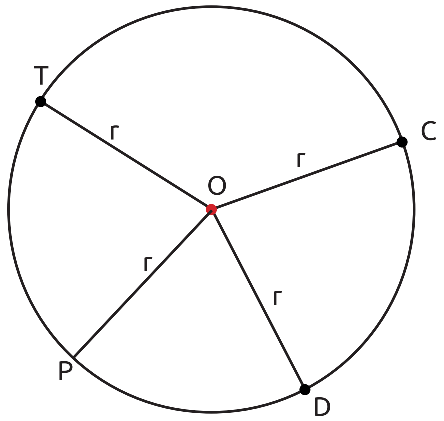


Figura 125 - Circunferêcia com suas distâncias r.

De acordo com a figura podemos afirmar que a distância r do ponto central aos pontos P, T, C e D são iguais.

$d_{OP} = d_{OT} = d_{OC} = d_{OD} = r$

O ponto O dado é chamado de *centro da circunferência* e a distância entre ele e os pontos são os *raios da circunferência*.

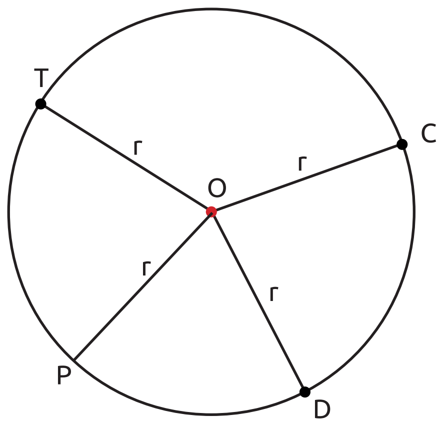


Figura 126 - Circunferência com todos os pontos e indicando o centro e os raios.

Por isso as varetas que ligam o eixo da roda da bicicleta ao aro são chamadas de raios da roda da bicicleta.

CAPÍTULO 10
Circunferência e círculo

POSIÇÃO DE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

Imagine que você desenhou uma circunferência no chão, se você jogar algumas pedras nessa circunferência, com os olhos fechados, você vai perceber que algumas pedras vão cair dentro da circunferência e outras cairão fora da circunferência, e algumas pedras cairão bem em cima da circunferência.

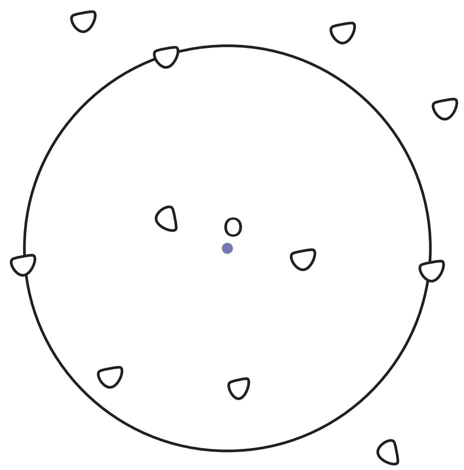


Figura 127 - Circunferência com as pedras.

Pense agora que cada pedra é um ponto no plano e o ponto O é o centro da circunferência, percebemos que os pontos A, B, C e D estão dentro da circunferência, os pontos E, F, G e H, estão fora da circunferência e os pontos I, J e K, estão bem em cima da circunferência.

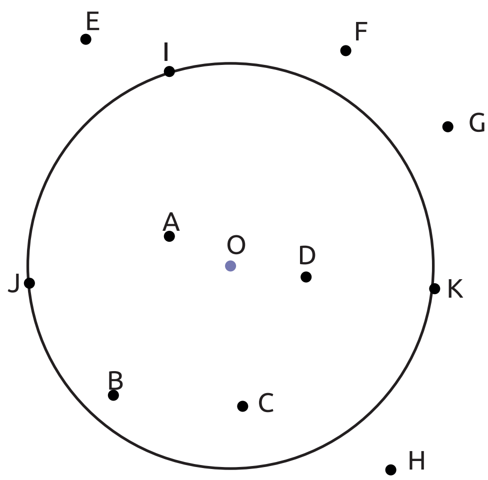


Figura 128 - Circunferência com os pontos marcados.

Lembre-se que o raio é a distância do centro a um ponto qualquer da circunferência,

Pela figura é possível verificar que os pontos A, B, C e D estão a uma distância do centro menor que a medida do raio, por isso esses pontos são internos à circunferência.

$d_{OA} < r$, $d_{OB} < r$, $d_{OC} < r$ e $d_{OD} < r$

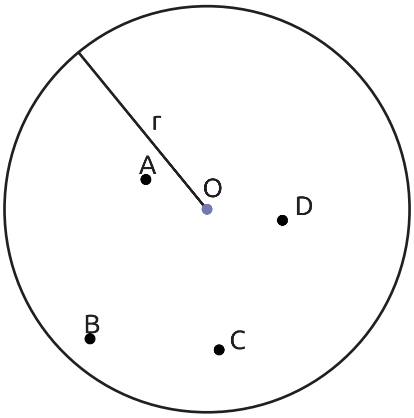


Figura 129 - pontos internos na circunferência

Continuando a observação percebemos que os pontos I, J e K, estão exatamente em cima da linha da circunferência, por isso dizemos que esses pontos pertencem à circunferência, pois a distância deles ao centro da circunferência é igual a medida do raio.

$d_{OI} = r$, $d_{OJ} = r$ e $d_{OK} = r$

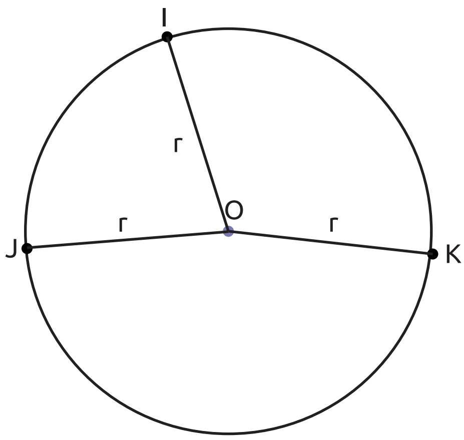


Figura 130 - Pontos pertencentes à circunferência.

E por fim os pontos E, F, G e H estão a uma distância do centro maior que a medida do raio, por isso eles são pontos externos à circunferência.

$d_{OE} > r$, $d_{OF} > r$, $d_{OG} > r$ e $d_{OH} > r$

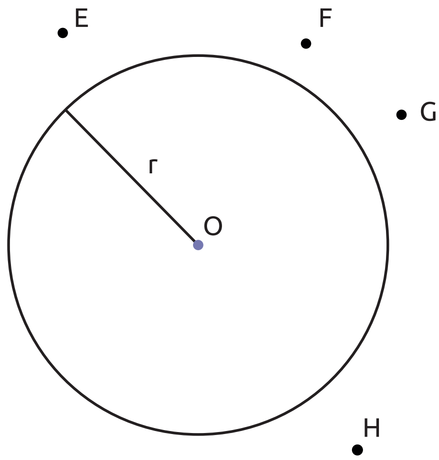


Figura 131 - Pontos externos à circunferência.

O conjunto de todos os pontos internos a uma circunferência é seu *interior*, e o conjunto de todos os pontos externos a uma circunferência é seu *exterior*.

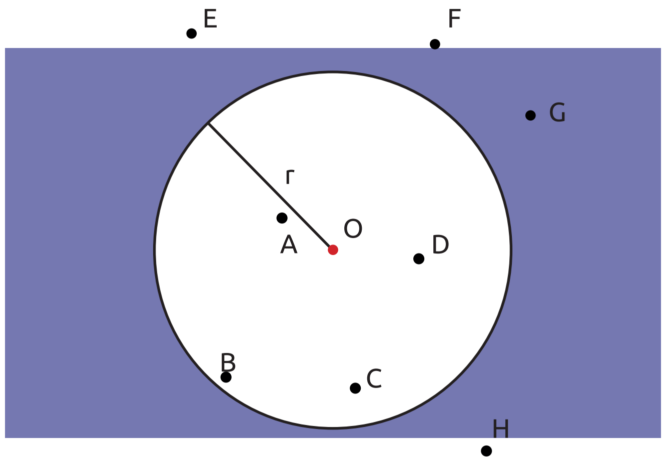


Figura 132 - Circunferência mostrando seu interior e exterior.

CORDA, DIÂMETRO, RAIO E ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

A circunferência possui alguns elementos bastante importantes, agora veremos o que são e como eles são localizados.

Imagine uma circunferência de centro O com os pontos A e B pertencentes a ela, se ligarmos os pontos A e B, teremos o segmento de reta AB.

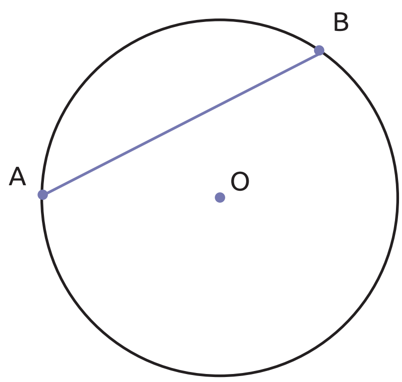


Figura 133 - Corda da circunferência

O segmento $\overline{AB}$ é chamado de *corda* da circunferência, pois é um segmento que possui suas extremidades pertencentes à circunferência.

Podemos dizer que:

Um segmento de reta determinado por dois pontos quaisquer da circunferência é a corda da circunferência.

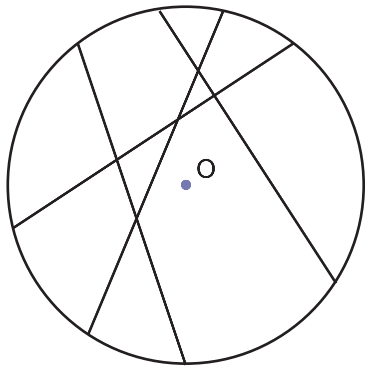


Figura 134 - Circunferência com várias cordas.

Quando a corda da circunferência passa exatamente no centro da circunferência dividindo-a em duas partes iguais, essa corda passa a ser chamada de diâmetro. Na Figura o segmento $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência.

O diâmetro é a maior corda da circunferência.

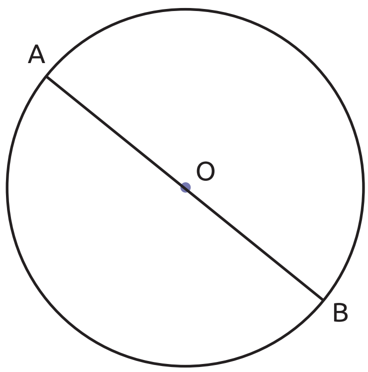
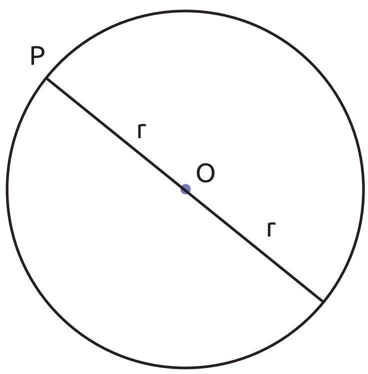


Figura 135- Diâmetro da circunferência

O raio da circunferência é o segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra em um ponto da circunferência, o raio é a metade do diâmetro.

Figura 136 - Raio da circunferência.



Para encerrar vamos ver em uma única circunferência a corda, o diâmetro e o raio.

O segmento $\overline{AB}$ é a corda, o segmento $\overline{CD}$ é o diâmetro e o segmento $\overline{OE}$ é o raio.

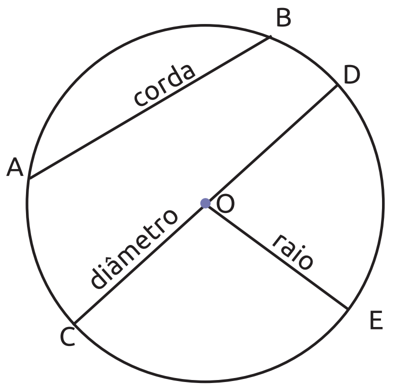


Figura 137 - Corda, diâmetro e raio da circunferência.

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA E SEMICIRCUNFERÊNCIA

Vamos imaginar novamente o círculo desenhado no chão e que você jogou as pedras, imagine que duas dessas pedras são dois pontos, o ponto I e o ponto J, você percebe que esses pontos dividem a circunferência em duas partes, cada uma dessas partes são chamadas de *arcos da circunferência*.

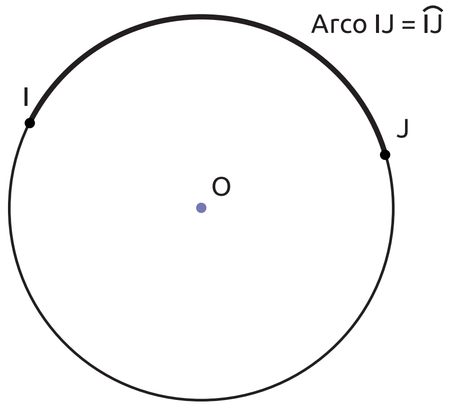


Figura 138 - Arco de circunferência $\widehat{IJ}$

Quando esses pontos coincidem com os pontos das extremidades do diâmetro, a circunferência será dividida em duas partes exatamente iguais, e cada uma das partes será uma semicircunferência.

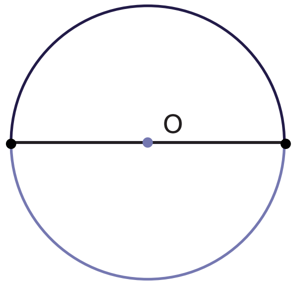


Figura 139- Circunferência dividida em duas semicircunferências

Muitas pessoas fazem confusão quando pensam em circunferência e círculo, mas será que os dois são a mesma coisa?

Não! Existe a confusão, mas circunferência e círculo são coisas diferentes, mas essa diferença é bem simples.

Como já foi estudado anteriormente a circunferência é o conjunto de pontos que estão a mesma distância de um ponto central fixo, vimos também que todo ponto que está dentro da circunferência são pontos internos a ela, e é ai que está a diferença.

Podemos dizer que a circunferência é apenas o contorno do círculo, e o círculo é o conjunto da união de uma circunferência com todos os seus pontos internos.

Dessa maneira a distância entre qualquer ponto do círculo ao centro é sempre menor que o raio da circunferência.

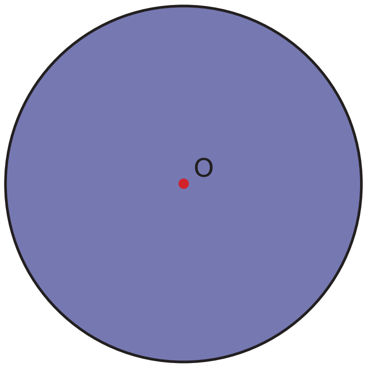


Figura 140- Círculo.

Para perceber claramente a diferença entre os dois, podemos pegar como exemplo um anel e uma moeda.

Figura 141- Um anel e uma moeda.

O anel tem apenas o contorno da região circular, ele representa a circunferência, já a moeda possui o contorno e toda a região interna preenchida, ela representa o círculo.

O círculo também é chamado de *disco*.

Uma curiosidade: em algumas culturas e religiões o círculo (circunferência) representa a eternidade, perfeição e divindade, pois ele não possui início e nem fim. É considerado a figura mais perfeita que existe.

O centro, o raio, o diâmetro, o arco e a corda de um círculo, são o centro, o raio, o diâmetro, o arco e a corda da circunferência da qual ele faz parte.

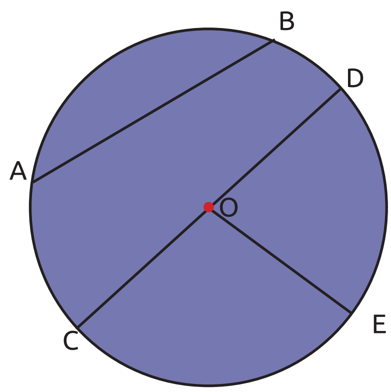


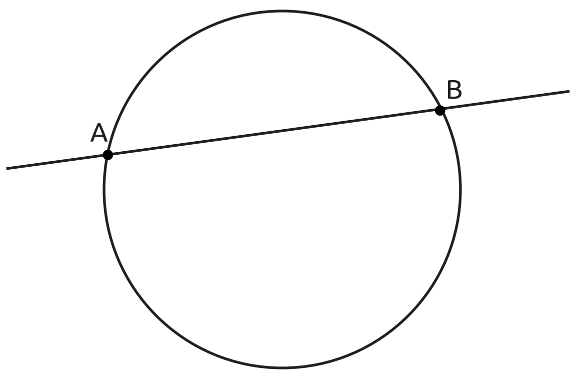
Figura 142 - Círculo e seus elementos.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS E CIRCUNFERÊNCIAS

Quando pensamos em relacionar as posições entre retas e circunferências podemos pensar basicamente em três casos, quando a reta intercepta (cruza) a circunferência em dois pontos, quando a reta toca a circunferência em apenas um ponto ou quando a reta está totalmente fora da circunferência. Vamos ver cada um dos casos:

Quando uma reta intercepta a circunferência em dois pontos distintos (diferentes), esta reta e a circunferência são *secantes*.

Figura 143 - Reta secante à circunferência.



Note na figura que essa reta forma o segmento AB dentro da circunferência, ou seja, esse segmento é uma corda da circunferência.

Se a reta intercepta (cruza) a circunferência em apenas um ponto, dizemos que esta reta é *tangente* à circunferência. A reta tangente à circunferência tem apenas um ponto em comum com a circunferência e os demais pontos da reta são todos externos à circunferência.

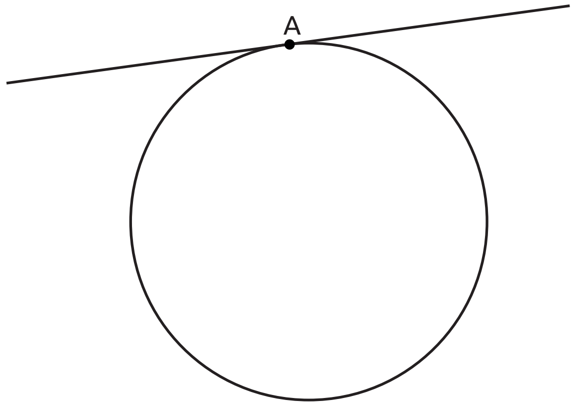


Figura 144 - Circunferência com a reta tangente a ela.

Agora se a reta não intercepta a circunferência, ou seja, ela não toca a circunferência em nenhum ponto, esta reta é *exterior* à circunferência.

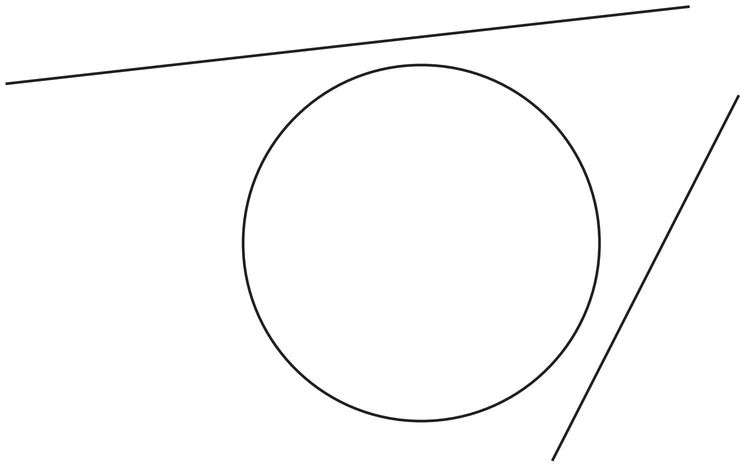


Figura 145 - Reta exterior à circunferência

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

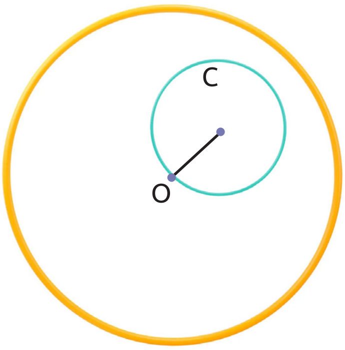
Da mesma forma que vimos que circunferências e retas tem posições relativas, duas circunferências também tem. Vamos ver agora as posições relativas entre duas circunferências.

Você deve conhecer o bambolê, um brinquedo bastante conhecido pelas crianças, ele é um aro (circunferência) plástico que deve ser girado em torno do corpo, perna ou braço, que diverte muita gente há muitas gerações. Vou utilizar esse brinquedo para exemplificar a posição relativa entre duas circunferências.

Vamos imaginar dois bambolês de diâmetros diferentes, um maior e outro menor, na primeira situação vamos colocar o bambolê menor no interior (dentro) do maior, fora do centro e sem encostar um no outro, podemos dizer que o bambolê menor é interno ao maior.

Uma circunferência será *interna* a outra se todos os seus pontos forem pontos internos ao da outra circunferência.

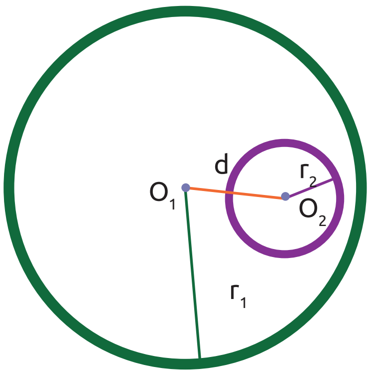
Figura 146 - Circunferência interna



Uma circunferência é interna a outra quando a diferença das medidas de seus raios é maior que a distância entre os centros da circunferência.

$d < r_1 - r_2$

Figura 147 -Relação entre os raios e a distância entre centros.



Agora vamos imaginar que o bambolê menor está dentro (interno) do maior, mas ele está tocando o maior, e percebemos que eles se tocam em apenas um ponto, quando isso acontece dizemos que o menor está tangenciando o maior e como o menor é interno ao maior dizemos que ele é tangente interno.

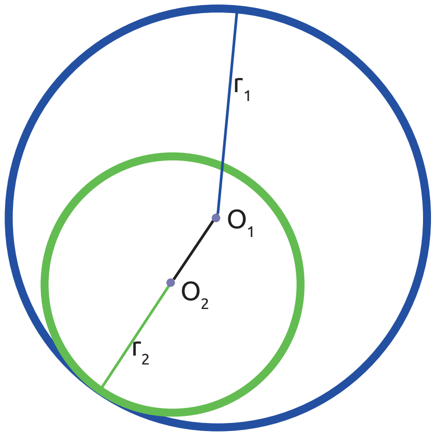


Figura 148 -Bambolês representando circunferências tangentes internas

Então, duas circunferências são *tangentes internas se possuírem apenas um ponto em comum e uma esteja no interi*or da outra. Isso só acontece se a medida da distância entre os centros das circunferências for igual a diferença entre as medidas dos dois raios.

Observe que $d_{O1O2} = r_1 - r_2$

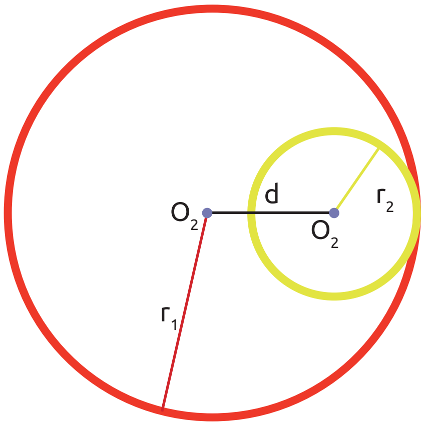


Figura 149 - Relação entre raio e distancias aos centros nas circunferências tangentes internas.

Os dois bambolês agora serão colocados de forma que o menor fique no lado externo do maior, mas tocando-se, novamente percebe-se que eles se tocam apenas em um ponto, e o bambolê menor tem todos os outros pontos externos ao maior, eles se tangenciam, mas pelo lado de fora do maior, por isso dizemos que eles são tangentes externos.

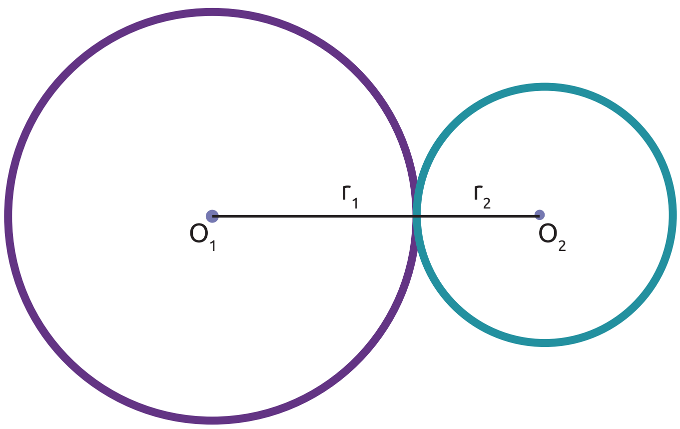


Figura 150- Bambolês representando circunferências tangentes externas.

Podemos concluir que duas circunferências são *tangentes externas* se possuírem um único ponto em comum e uma esteja externa à outra, isso acontece quando a medida da distância entre os centros das circunferências for igual a soma das medidas dos raios.

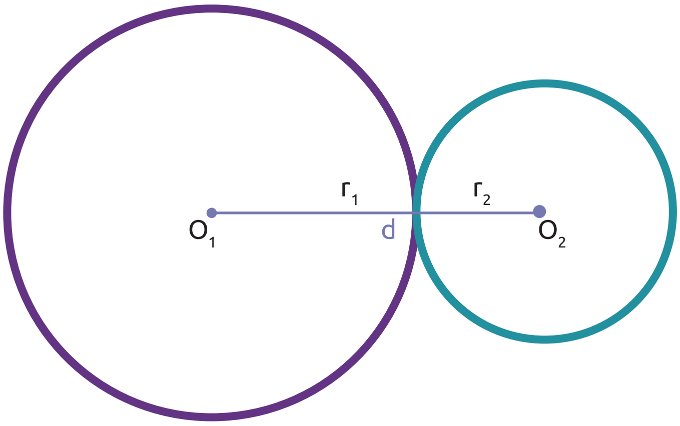


Figura 151 - Circunferências tangentes externas.

Observe que $d_{O1O2} = r_1 + r_2$

Vamos pensar agora que esses dois bambolês foram jogados ao chão e eles caíram um em cima do outro.

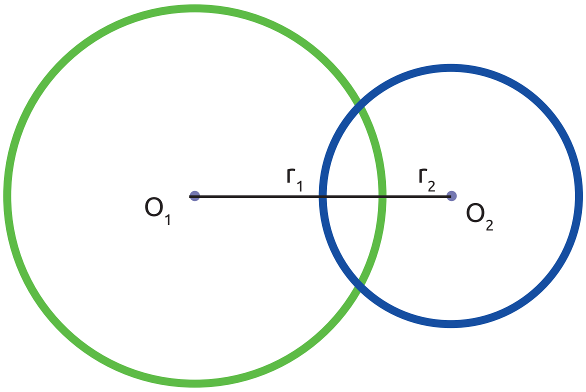


Figura 152 - Circunferências secantes, se cruzam em dois pontos distintos

Você pode observar que esses bambolês se cruzam em dois pontos diferentes (distintos) e esses pontos são comuns aos dois bambolês, quando isso acontece, dizemos que eles são secantes um ao outro.

Neste caso, podemos dizer que duas circunferências serão secantes se a medida das distâncias entre os seus centros for menor que a soma das medidas de seus raios e maior que a diferença entre seus raios, observe: $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.

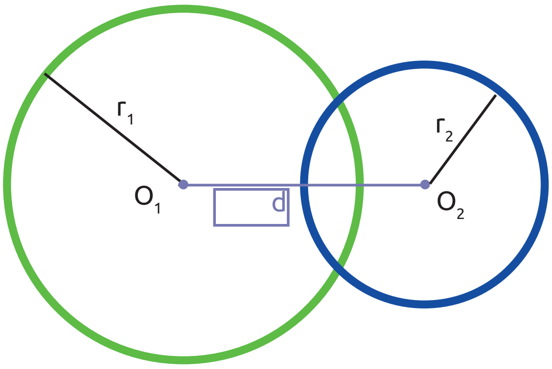


Figura 153 - Relação entre raios e distâncias do centro nas circunferências secantes.

Mas e se os bambolês estivessem caídos com o menor totalmente fora do maior, ou seja, eles não estão se tocando em nenhum ponto? Neste caso como eles não têm nenhum ponto em comum, todos os pontos do menor estão fora do maior, por isso ele é externo ao maior.

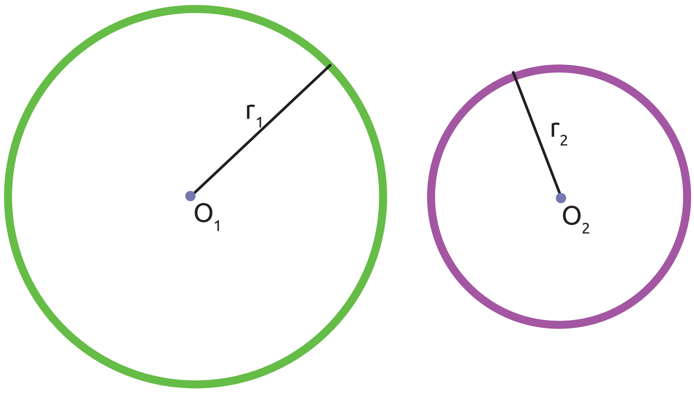


Figura 154 - Circunferências externas.

Duas circunferências são *externas* quando todos os pontos de uma estão no exterior da outra sem ter pontos em comum. Neste caso a distância entre os centros das duas circunferências é maior que a soma das medidas de seus raios. $d < r_1 + r_2$

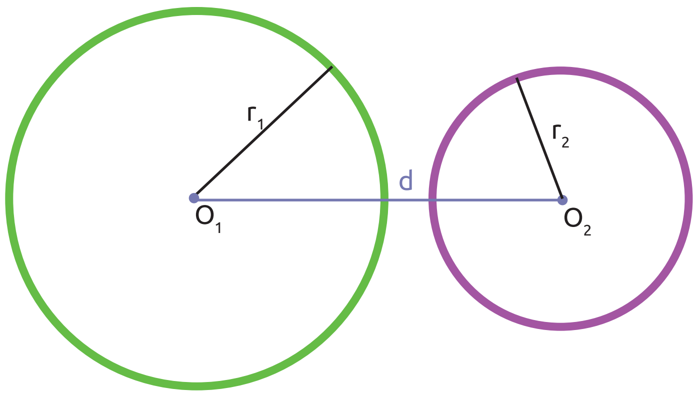


Figura 155 - Circunferências externas.

Agora teremos uma situação difícil com os bambolês, o menor está interno ao maior, mas os centros dos dois são dados pelo mesmo ponto, ou seja, ambos têm o mesmo centro.

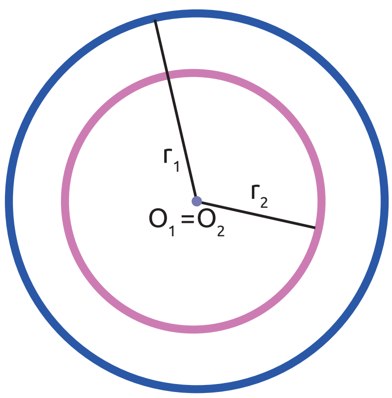


Figura 156 - Os dois bambolês com o mesmo centro.

Neste caso as duas circunferências possuem o mesmo centro, ou seja, um mesmo ponto é o centro das duas, e a distância entre os centros delas é igual a 0 (zero), neste caso vamos ter duas circunferências concêntricas.

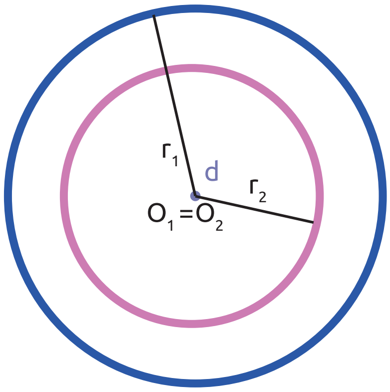


Figura 157 - Duas circunferências concêntricas.

Observe que $d_{O1O2} = 0$

ÁREA DO CÍRCULO

Muitas vezes ouvimos pessoas pedindo para que se faça o cálculo da área da circunferência, mas será que está correto isso?

Pelos estudos dos temas anteriores é possível analisar a afirmativa e chegar à conclusão que não está correta, porque a circunferência é apenas o contorno da região circular, ela é apenas uma linha. O correto é calcular a área do círculo.

Vamos ver como se faz isso então.

Primeiro vamos precisar de um elemento novo, que é o π, letra grega Pi. O π é uma constante, em praticamente tudo que você estudar que envolva círculos e circunferências, o π vai estar presente.

O π é a razão entre o comprimento da circunferência e diâmetro do círculo ao qual ela pertence, π é um número irracional que, normalmente, arredondamos o valor para três casas, com o valor π=3,14.

O comprimento da circunferência é o seu perímetro.

$$\frac{\text{perímetro}}{\text{diâmetro}} = \pi$$

Com isso podemos concluir que a razão entre o comprimento da circunferência de um pneu de carro pelo seu diâmetro é a mesma que o comprimento da circunferência de uma moeda pelo seu diâmetro, ou seja π!

Para calcular o comprimento da circunferência fazemos $C = \pi.D$, como o diâmetro é o dobro do raio, podemos também calcular o comprimento da seguinte forma $C=2\,\pi r$

Para o cálculo da área do círculo basta multiplicarmos o π pelo quadrado do raio.

$$A = \pi . r^2$$

Existem várias formas de dedução da fórmula do cálculo da área do círculo, mas para o momento basta você lembrar como se calcula esta área utilizando-se apenas da fórmula.

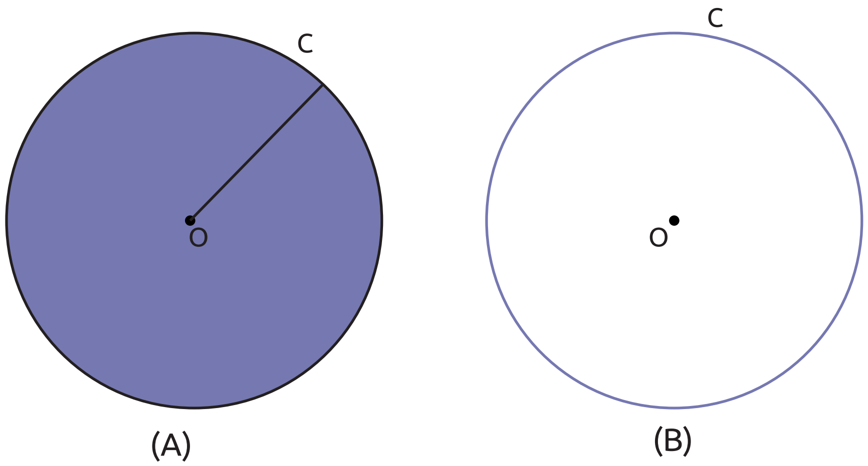
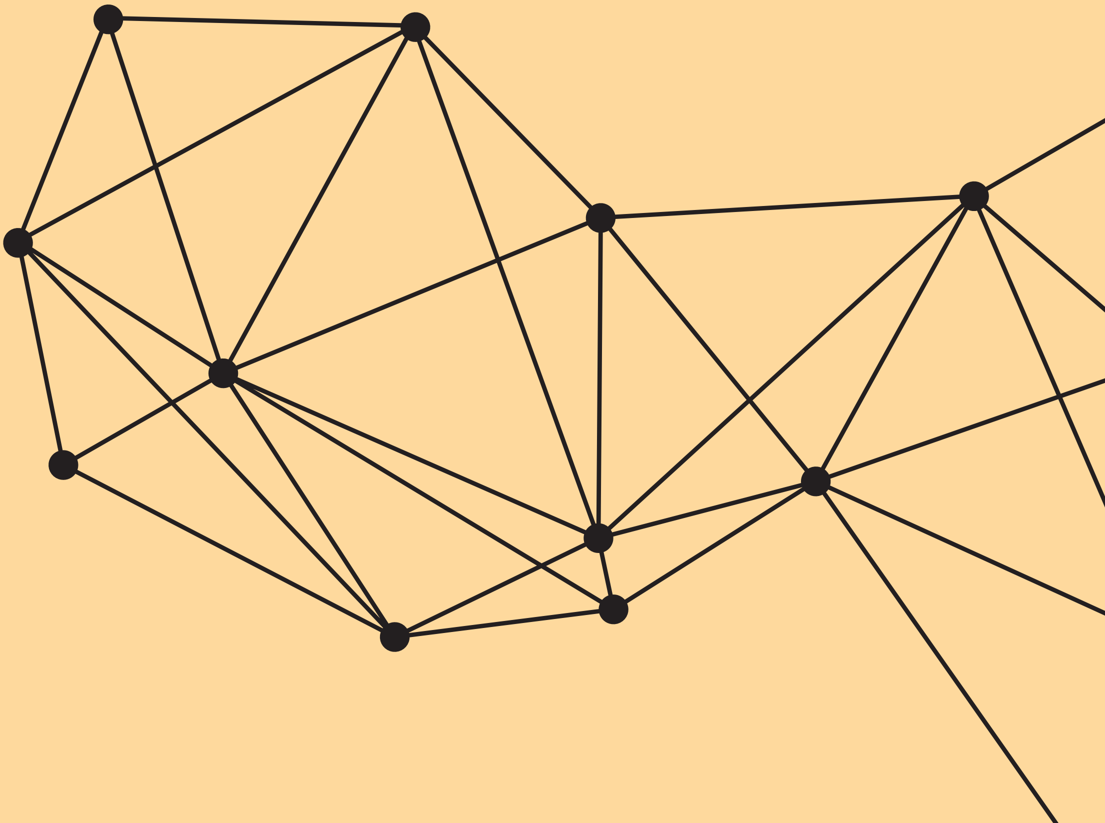


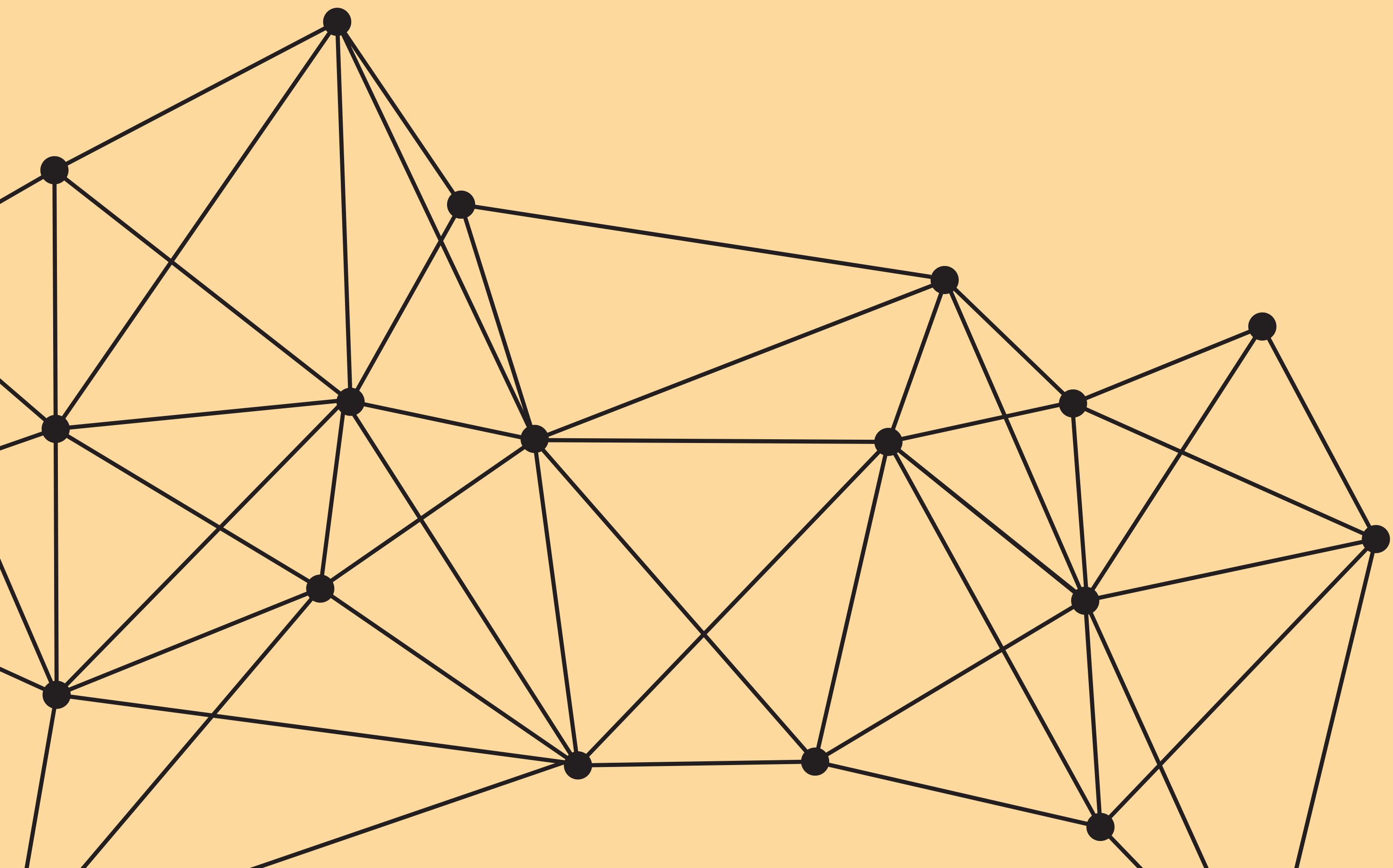
Figura 158 - Círculo com representação (A) da área e (B) do comprimento da circunferência .

11

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA



“DE PASSO A PASSO,
DE POUCO EM POUCO,
SE VAI PARA LONGE,
APENAS PARA PERCEBER QUE SEMPRE
SE RETORNA AO INÍCIO,
E QUE NO INÍCIO, NADA MUDA.”



ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

O estudo da relação entre a circunferência e ângulos é muito importante na geometria, principalmente quando se trata de cálculos astronômicos. Mas apesar de ser usado na astronomia as definições são simples, os ângulos relacionados à circunferência são, o ângulo central, ângulo inscrito, ângulo externo, interno e os ângulos de segmento.

O *ângulo central* relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Em uma circunferência de centro O, o ângulo central vai determinar um arco de circunferência $\overset{\frown}{AB}$.

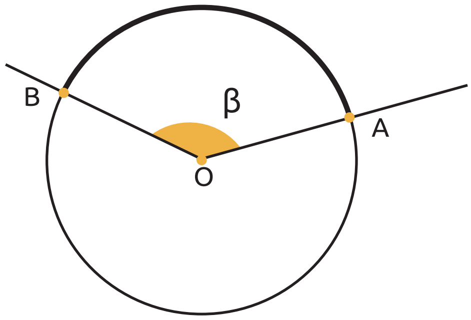


Figura 159 - Ângulo central da circunferência

O arco $\overset{\frown}{AB}$ é correspondente ao ângulo AÔB

Como o arco $\overset{\frown}{AB}$ também é dado em graus, percebe-se que o arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual a medida do ângulo central AÔB

Podemos utilizar uma letra grega qualquer para nomear o ângulo, vamos usar a letra β (beta), observe que $\beta = \overset{\frown}{AB}$

O ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados do ângulo são secantes a essa circunferência.

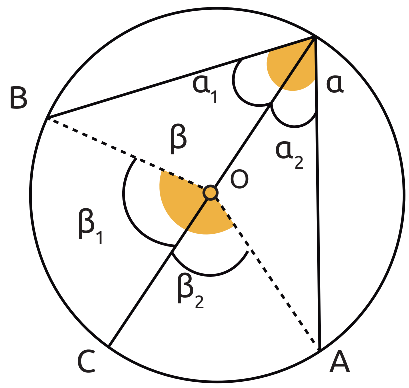


Figura 160 - α é um ângulo inscrito na circunferência.

Observe na figura que α é o ângulo inscrito, $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente e β é o ângulo central correspondente ao ângulo inscrito α.

A medida do ângulo inscrito é igual a metade do ângulo central correspondente a ele.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

O *ângulo interno* é o ângulo que tem o vértice no interior da circunferência, mas não no centro, distante dele, os seus lados são secantes à circunferência, eles se cruzam formando o ângulo interno, os dois lados formam os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, este ângulo tam-

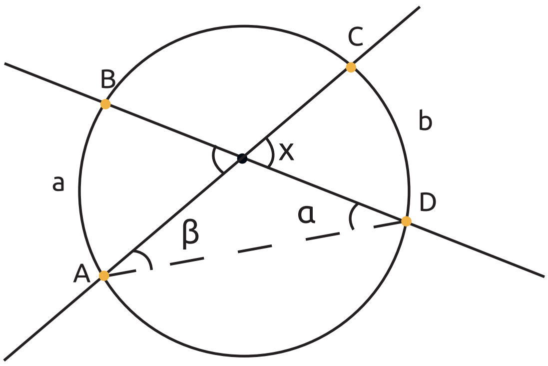


Figura 161 - x é o ângulo interno à circunferência.

bém é conhecido como *ângulo excêntrico interior.*

A medida deste ângulo é a metade da soma dos arcos AB e CD.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

O *ângulo externo* é o ângulo que possui o vértice no exterior da circunferência, ele fica fora da circunferência, e seus lados são secantes ou tangentes à circunferência, esses lados formam os

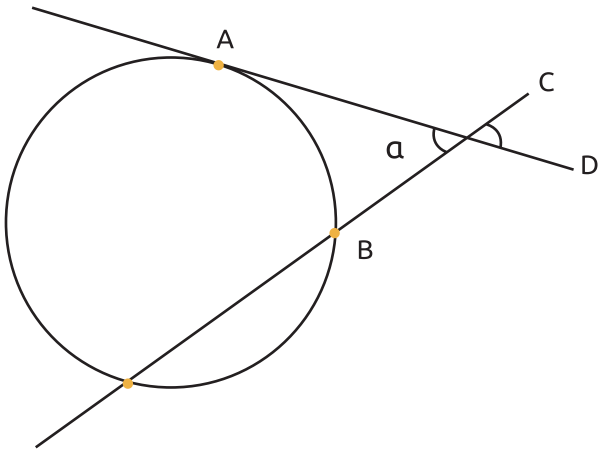


Figura 162 - circunferência com o ângulo externo α.

arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, e também é conhecido como *ângulo excêntrico exterior.*

A medida do ângulo externo é a metade da diferença dos arcos formados $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

ÂNGULO DE SEGMENTO OU ÂNGULO SEMI-INSCRITO

Ângulo de segmento ou ângulo semi-inscrito relativo a uma circunferência é o ângulo que tem o vértice num ponto da circunferência, um dos lados é uma secante à circunferência e o outro lado é tangente à circunferência.

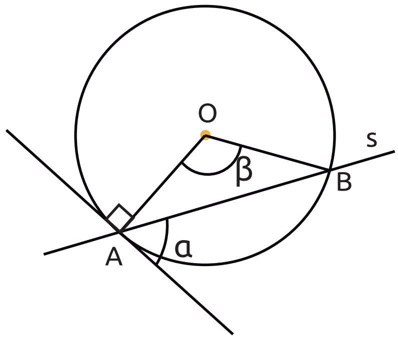


Figura 163 - α é o ângulo de segmento ou semi-inscrito na circunferência.

Observe na figura que a reta s é secante à circunferência, a reta t é tangente a essa circunferência, o ângulo β é o ângulo central (AOB), e o ângulo α é o ângulo de segmento, e AB é o arco de circunferência subtendido.

A medida do ângulo de segmento será sempre a metade do ângulo central da circunferência.

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

Desta forma encerramos mais uma conversa sobre as circunferências, existe muito mais a ser estudado, mas é necessário ir por partes para não se perder no caminho, estudar bastante e compreender o que significa cada elemento é muito importante para poder resolver exercícios e situações-problema que os envolva.

"

A EDUCAÇÃO É A ARMA MAIS PODEROSA QUE VOCÊ PODE USAR PARA MUDAR O MUNDO."

NELSON MANDELA

12

O TEOREMA DE TALES

PERGUNTARAM A TALES:

- QUAL É A MAIS RÁPIDA DE TODAS AS COISAS?

- O PENSAMENTO, PORQUE EM MENOS DE UM MINUTO VOCÊ PODE VOAR ATÉ O FINAL DO UNIVERSO.

- QUAL É A MAIS FORTE DE TODAS AS COISAS?

- A NECESSIDADE, PORQUE FAZ COM QUE O HOMEM ENFRENTE TODOS OS PERIGOS DA VIDA.

- QUAL É A MAIS FÁCIL DE TODAS AS COISAS?

- DAR CONSELHOS.

- QUAL É A MAIS DIFÍCIL DE TODAS AS COISAS?

E O SÁBIO DE MILETO REPLICOU:

- CONHECER A SI MESMO.

TALES DE MILETO

CAPÍTULO 12
O teorema de Tales

Tales de Mileto foi um filósofo, astrônomo e matemático grego, foi muito reconhecido em sua época pelas suas descobertas e pelo seu pensamento filosófico. Sua sabedoria percorreu o mundo e muitos outros o seguiram. Vários temas tratados em capítulos anteriores são atribuídos a Tales, são descobertas de Tales a demonstração de que os ângulos da base de dois triângulos isósceles são iguais e também a demonstração que todo diâmetro divide a circunferência em duas semicircunferência iguais.

O que vamos estudar agora é uma das descobertas mais importantes de Tales, tanto que recebe seu nome, o *Teorema de Tales*.

Antes de iniciar vamos recordar o que são retas paralelas e retas transversais.

Duas *retas paralelas* são retas em que todos os seus pontos mantem sempre a mesma distância, e tem a mesma inclinação, por isso elas nunca se interceptam (cruzam).

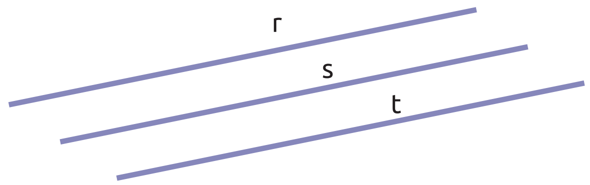


Figura 164 - Uma reta s e uma reta t, paralelas.

As retas transversais são aquelas que cruzam um par ou um feixe de retas paralelas.

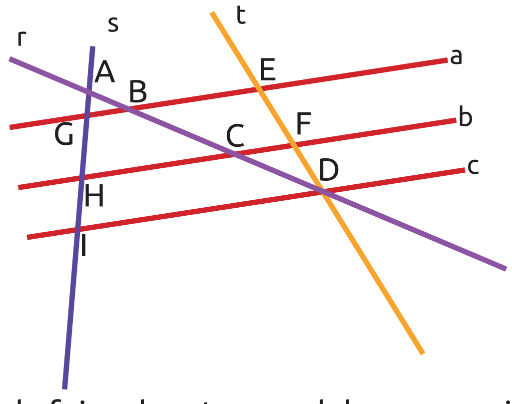


Figura 165 - Retas a, b, c e d são paralelas; Retas r, s e t são transversais

Chamamos de feixe de retas paralelas, um conjunto de retas paralelas entre si.

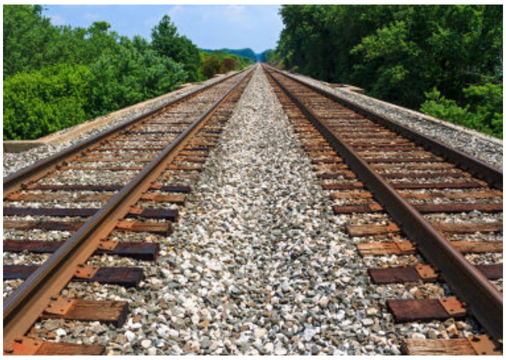


Figura 166 - feixe de retas paralelas nos trilhos do trem.

Tales tinha um grande conhecimento de Geometria e proporcionalidade (já estudado em capítulos anteriores), ele observou que quando os raios solares atingiam a Terra eles estavam na posição inclinada e também eram paralelos entre si, com isso ele começou a admitir que existia uma proporcionalidade entre as medidas da sombra de um objeto e a altura desse objeto.

O que Tales percebeu foi que quando o raio solar atingia o topo de um determinado objeto em uma determinada hora do dia, a inclinação do raio solar seria a mesma de um outro raio que atingiu um outro objeto, portanto as sombras dos dois objetos seriam proporcionais e as suas alturas também.

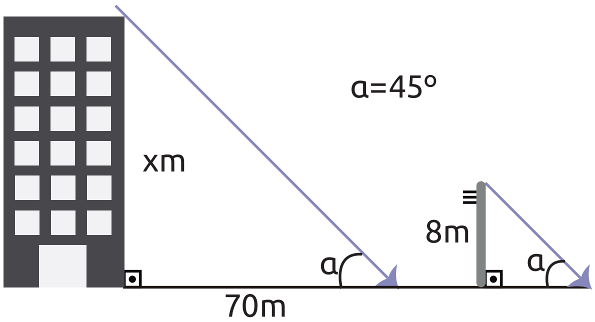


Figura 167 - Proporcionalidade entre os objetos percebida por Tales.

Com isso Tales chegou a conclusão do seu famoso *Teorema de Tales*, que diz o seguinte:

“Se um feixe de retas paralelas é interceptado (cruzado) por duas retas transversais, os segmentos formados entre elas serão todos proporcionais”.

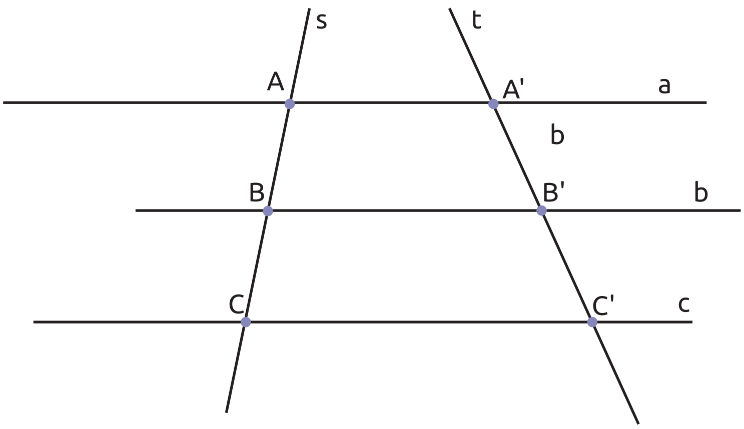


Figura 168 -Feixe de retas paralelas interceptadas por retas transversais.

Observe a figura: as retas a, b e são paralelas, as retas r e s são transversais, que formam os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Podemos dizer que o segmento $\overline{AB}$ está para o segmento $\overline{BC}$, assim como o segmento $\overline{A'B'}$ está para o segmento $\overline{B'C'}$.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Da mesma podemos ter também que o segmento $\overline{AB}$ está para o segmento $\overline{A'B'}$, assim como o segmento $\overline{BC}$ está para o segmento $\overline{B'C'}$.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Observando os dois casos percebe-se que a proporcionalidade é a mesma, preste atenção que no primeiro caso pegamos os segmentos formados na mesma transversal, o segmento $\overline{AB}$ estava em cima e o $\overline{BC}$ em baixo, note que na segunda transversal ocorreu o mesmo, pegamos primeiro o segmento de cima $\overline{A'B'}$ e depois o segmento de baixo $\overline{B'C'}$, observe que só serão proporcionais os segmentos correspondentes.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

No segundo caso pegamos o primeiro segmento na reta r com seu correspondente, que é o primeiro segmento da reta s, e a outra razão com o segundo segmento da reta r com o segundo segmento da reta s, o que garante a proporcionalidade, de novo deve ser observado que só serão proporcionais os segmentos correspondentes.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

O TEOREMA DE TALES E OS TRIÂNGULOS

Já utilizamos a lei de correspondência aqui do Teorema de Tales, no capítulo dos triângulos semelhantes, os casos de semelhança são baseados neste Teorema.

Vamos pensar em um triângulo ABC qualquer, se uma reta paralela a um dos lados do triângulo cruza com os outros dois lados em pontos distintos, essa reta vai estar dividindo estes dois lados na mesma razão.

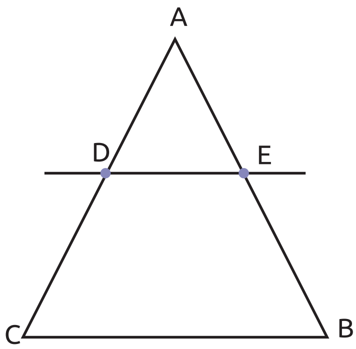


Figura 169 - Teorema de Tales no triângulo

Na figura é possível perceber que que foram formados dois triângulos, o triângulo Maior ABC e o triângulo menor ADE, que são semelhantes.

Então temos que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Os casos que podem ser solucionados através do Teorema de Tales são muitos, você deve apenas lembrar da proporcionalidade, que ocorre apenas em segmentos correspondentes, com isso em mente, não tem erro!

TEOREMA DAS BISSETRIZES: TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

Os teoremas das bissetrizes são dois teoremas bastante simples de serem compreendidos.

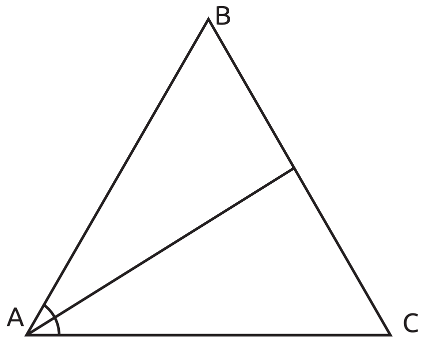


Figura 170 - Bissetriz interna do triângulo ABC

Vamos pegar um triângulo de vértices ABC e traçar a bissetriz de um de seus ângulos, pegaremos o ângulo BÂC, no vértice A.

O ponto que a bissetriz cruza com o lado BC, vamos chamar de S, o lado BC foi dividido em duas partes BS e SC ou CS tanto faz. O que o teorema da bissetriz interna nos mostra é que essas duas partes formadas pela bissetriz são diretamente proporcionais aos seus lados adjacentes.

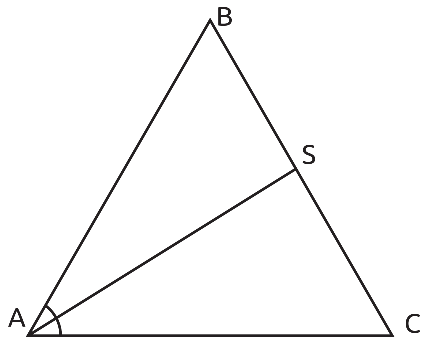


Figura 171 - Triângulo ABC com a bissetriz no vértice A, com o ponto S.

Pela figura vamos ter que o lado AB é adjacente a BS e o lado AC é adjacente a CS, o que significa isso? Significa que a divisão entre AB e BS tem que dar o mesmo resultado que a divisão entre AC e CS, vamos ter que:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$

É essa a afirmação do Teorema da bissetriz interna, agora vamos analisar o teorema da bissetriz externa.

TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

O teorema da bissetriz externa é só um pouquinho diferente, porque agora vamos traçar a bissetriz de um ângulo externo do triângulo, lembre-se que o ângulo externo do triângulo é encontrado pelo prolongamento dos lados. Vamos pegar um triângulo ABC e traçar o prolongamento do lado AB para encontrar o ângulo externo ao vértice A, encontrando o ângulo vamos traçar a sua bissetriz, vamos precisar traçar um prolongamento do lado BC porque é nesse prolongamento que encontraremos o ponto S do cruzamento da bissetriz.

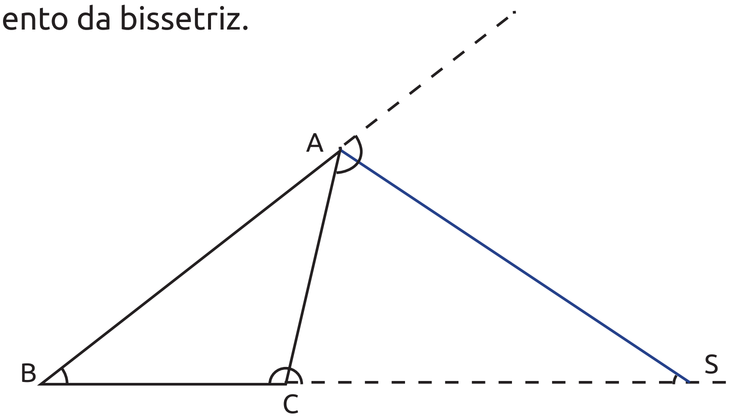


Figura 172 - Bissetriz externa do triângulo ABC.

Apesar das figuras serem diferentes e as situações também diferentes, o teorema será praticamente muito parecido, se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide o lado oposto externamente, em segmentos proporcionais aos seus lados adjacentes.

Vejamos, o lado AB é adjacente a BS e o lado AC é adjacente a CS, o que significa isso? Significa que a divisão entre AB e BS tem que dar o mesmo resultado que a divisão entre AC e CS, vamos ter que:

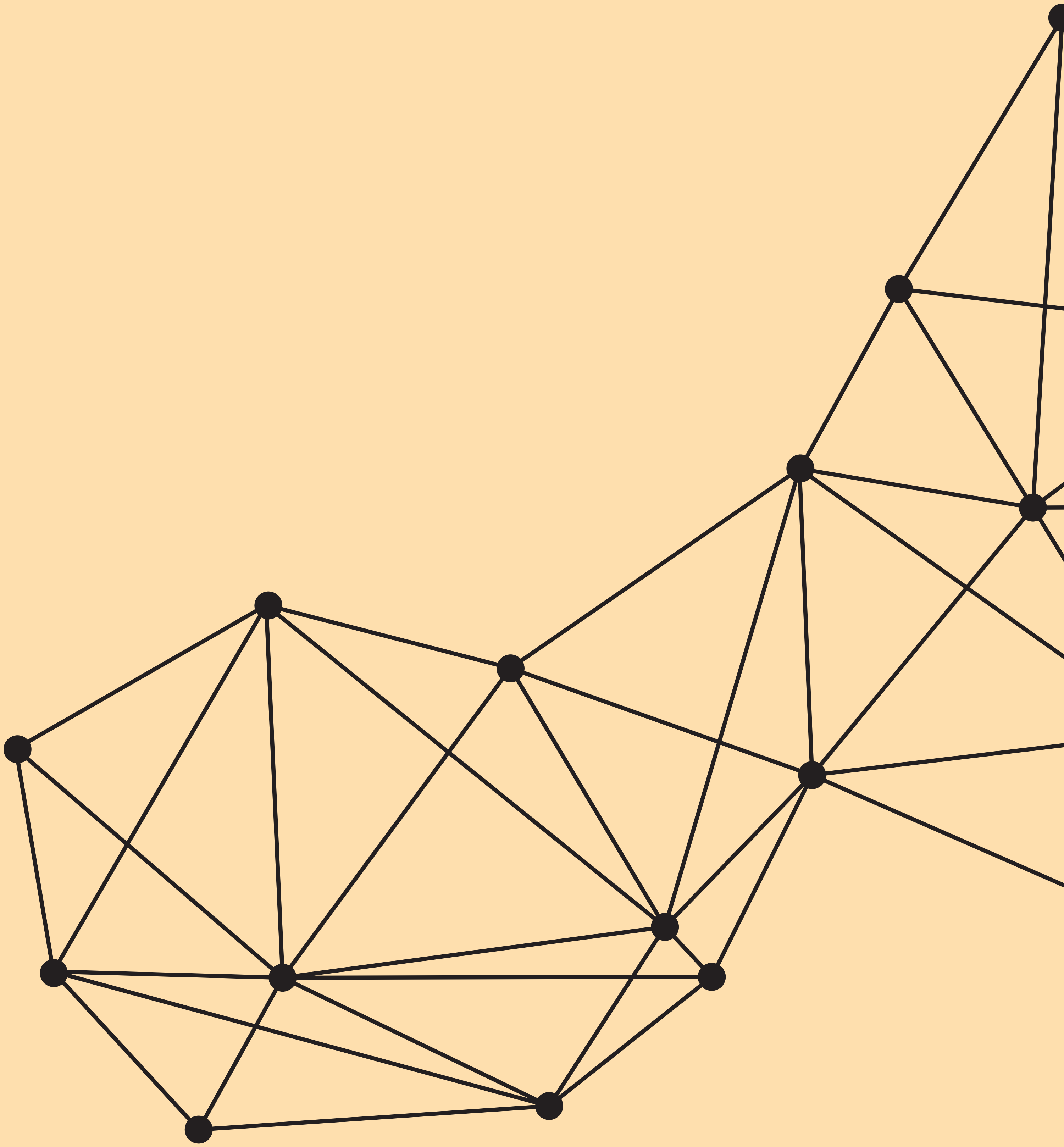
$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$

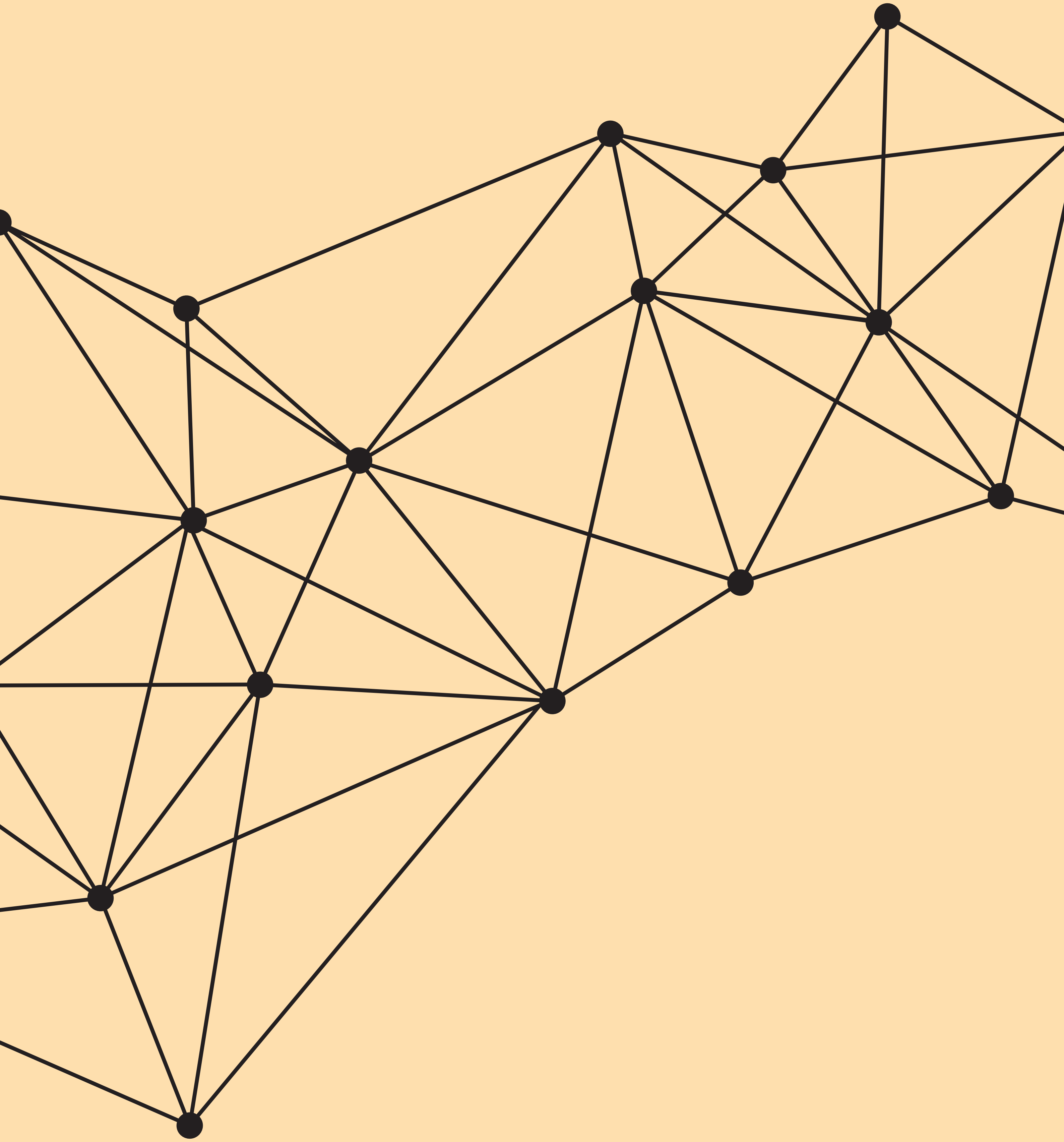
Podemos então afirmar que a relação AB/BS = AC/CS serve para as duas situações, tanto para a bissetriz interna quanto para a bissetriz externa.

Bom, aqui chegamos ao final desta etapa de nossa aventura por uma parte da Geometria Plana, mas ainda tem muito mais, e o aprendizado ocorre pela curiosidade, pela procura e pela incansável busca do conhecimento, esperamos que você tenha aprendido muito com esse trabalho, e que tenha instigado a sua vontade de aprender sempre mais. Até mais pessoal!

> “A ÁREA DA GEOMETRIA FAZ COM QUE POSSAMOS ADQUIRIR O HÁBITO DE RACIOCINAR, E ESSE HÁBITO PODE SER EMPREGADO, ENTÃO, NA PESQUISA DA VERDADE E AJUDAR-NOS NA VIDA”
>
> **JACQUES BERNOULLI**

CONCLUSÃO





Enfim, o fim – do livro. Através dele, caminhamos juntos pelos principais conceitos da Geometria de uma forma acessível e em uma linguagem simples. Nosso principal objetivo foi fazer com que o livro tenha proporcionado uma fonte de fácil acesso aos conhecimentos básicos da Geometria e que, a partir de então, você possa seguir em frente e adquirir mais conhecimentos por si só. Em outras palavras, esperamos que o livro tenha dado confiança para que busque os conhecimentos que são importantes para os seus sonhos.

Nelson Mandela uma vez disse que a educação é a arma mais poderosa para mudar o mundo. E nós concordamos com ele. O conhecimento é chave para as realizações dos sonhos, para combater diferenças sociais, para combater a discriminação, o racismo, e qualquer outra forma de ódio e violência que a nossa sociedade vivencia diariamente. O conhecimento nos torna adaptáveis e flexíveis a qualquer situação – seja ela profissional ou pessoal – e nos torna, de certa forma, invencíveis. Assim, além de uma fonte de conhecimento, esperamos que o livro seja uma fonte de inspiração.

Antes de terminar, gostaríamos de deixar uma mensagem para os estudantes. Seja você branco, negro, japonês, de cabelo longo ou curto. Para você que é loiro, moreno, ou ruivo, de olhos claros ou escuros. De classe social alta ou baixa, de escola particular ou pública.

Esse livro é a realização de um sonho. Um sonho que começou dentro da cabeça de pessoas como você, com problemas como você, e de situações financeiras como a sua, mas que hoje tomou forma e se apresenta diante dos seus olhos. Esse livro é uma evidência de que sonhos são possíveis quando temos foco, perseverança e muito amor ao próximo. O livro nasceu de uma vontade de proporcionar oportunidades a todos – sem preconceitos – para que cada um de nós consiga realizar nossos sonhos. E quando isso acontecer, que também saibamos retribuir o nosso dom e o nosso talento de volta aos mais novos, e ajudá-los a terem melhores oportunidades que nós tivemos. Com esse sentimento de comunidade e responsabilidade social é que um dia talvez você seja o autor do seu próprio livro – o livro que reflita a sua história e que sirva de inspiração para que outros jovens escrevam seus próprios caminhos.

Provavelmente, quando você tentar dar um passo ousado, fora da sua zona de conforto, você será julgado. Não se apegue a esse medo, pois o medo aprisiona. Você já deve ter pensando que não se encontra onde deseja e que não está utilizando todo o seu potencial. Você continua acreditando que pode fazer diferente e atingir seus sonhos. Essa voz dentro de você é o seu inconsciente se comunicando, lembrando que você tem potencial ilimitado. É uma sensação incrível sentir que você pode fazer qualquer coisa no exato momento em que você está motivado e pensando sobre isso.

Não tenha medo da incerteza ou do desconhecido. O que vem a seguir é o que transformará completamente sua vida. Não é da nossa escuridão que temos medo e sim da nossa luz. Não se importe em deixar de lado o que é familiar ou aquilo que não te faz se tornar uma pessoa melhor. As respostas para as nossas perguntas mais profundas aparecerão quando corrermos o risco e nos lançamos em direção aos nossos objetivos. Confie no seu instinto. Do outro lado do conforto, dos rótulos, e dos medos estão as inúmeras possibilidades de transformar a sua realidade e realizar seus sonhos. Decida confiar em si mesmo, assim como confiamos em nós mesmos ao escrevermos esse livro.

Muito obrigado por fazer parte do nosso sonho.

EDUCAÇÃO
CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico